This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

UNIVERSITY OF
CALIFORNIA
SANTA CRUZ

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Dick 506:a528

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

276

DER

Amsterdam

KONINKLIJKE AKADEMIE

2 mal Exx.

VAN

WETENSCHAPPEN.

VF1

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

ZESTIENDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1881.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

ZESTIENDE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

Verslag van de Heeren HOFFMANN en ENGELMANN over eene verhandeling des Heeren R. HORST, getiteld: over bevruchting en ontwikkeling van Hermella alveolata M. E., uitgebracht in de vergadering van 30 October 1880 . . . . blz. 205.

Verslag van de Heeren BOSSCHA, VAN DER WAALS en GRINWIS, over de beproeving van bliksemafleiders, uitgebracht in de vergadering van 27 November 1880. . . . . „ 215.

Rapport van de Heeren VAN DER WAALS, BOSSCHA en GRINWIS op de verhandeling van Dr. H. KAMERLINGH ONNES, getiteld: „Algemeene theorie der vloeistoffen," aangeboden in de vergadering van 24 December 1880. . . . . „ 241.

Rapport van den Heer C. VERLOREN over een opstel van den Heer C. PH. SLUITER, uitgebracht in de vergadering van 26 Februari 1881 . . . . . „ 280.

Verslag van de Heeren VAN DER WAALS, BOSSCHA en GRINWIS over twee verhandelingen van Dr. H. KAMERLINGH ONNES, uitgebracht in de vergadering van 26 Februari 1881 . . blz. 294.

MEDEDEELINGEN.

D. BIERENS DE HAAN. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden . „ 1.

MICHAËLIS. De Taybrug . . . . . „ 45.

F. J. VAN DEN BERG. Over periodieke terugloopende betrekkingen tusschen de coëfficiënten in de ontwikkeling van functiën; meer in het bijzonder tusschen de Bernoulliaansche en ook tusschen eenige daarmede verwante coëfficiënten . „ 74.

J. A. C. OUDEMANS. Mededeeling betreffende de sterrebeelden, wier hoogte boven den horizon, op een bepaald oogenblik van den nacht, door de Javanen ten behoeve van den landbouw geraadpleegd wordt . . . . . „ 177.

G. F. W. BAEHR. Sur un théorème d'Abel et sur les formules goniométriques qui s'en déduisent . . . . . „ 195.

Dr. R. HORST. Over bevruchting en ontwikkeling van Hermella alveolata MILN. EDW. . . . . „ 207.

E. MULDER. Bijdrage tot de kennis van normaal cyaanzuur. „ 223.

C. H. C. GRINWIS. De overgang der energie bij de botsing van lichamen. . . . . „ 244.

E. H. VON BAUMHAUER. Over de kristallisatie van het diamant. „ 274.

C. PH. SLUITER. Vorläufige Mittheilung ueber einige neue Holothurien von der Westküste Java's . . . . . „ 282.

E. MULDER en H. G. L. VAN DER MEULEN. Bijdrage tot de thermo-chemische kennis van ozon . . . . . „ 286.

CH. M. SCHOLS. Over de aansluiting van een driehoeksnet van lagere orde aan een driehoeksnet van hoogere orde. . blz. 297.

F. J. STAMKART. Kopij van eene berekening van den uitslag der gedane wegingen en onderlinge vergelijkingen van den platina standaard van het Ned. pond, en van twee koperen standaards, met het prototype van het kilogram, enz. „ 350.

F. J. STAMKART. Gewigten en maten ten dienste van het ijkwezen in Nederl. Oost-Indië, onderzocht in de jaren 1866—1868 door de Commissie voor standaardmeter en -kilogram . . . . . „ 359.

A. P. N. FRANCHIMONT. Over de werking van zwavelzuur op azijnzuuranhydride . . . . . „ 368.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XIX. EERSTE GEBRUIK DER ISOHYPSEN DOOR NEDERLANDSCHE INGENIEURS — N. S. CRUQUIUS — M. BOLSTRA.

1. Het is bekend, dat men alle bijzonderheden van een oneffen terrein, van bergen, enz. zeer gemakkelijk en duidelijk voorstelt door het aangeven der lijnen van een gelijk niveau: op die wijze toch wordt de meer of minder steile helling door korteren of grooteren afstand der opvolgende niveau-lijnen (isohypsen) voorgesteld, en verkrijgt men eene heldere voorstelling van den vorm van een berg of gebergte.

Keert men de voorstelling om, dat is, denkt men zich de hoogten negatief, dus diepten, dan kunnen evenzoo diezelfde lijnen ook omgekeerd dienen, om den vorm van rivierbeddingen, zeestranden, enz. aan te geven. In dit laatste geval geven die lijnen den vorm van den stroom aan, indien de waterspiegel plotseling eene bepaalde lengte zakte: in het eerste geval den omtrek, dien een plotseling rijzende waterspiegel op den berg zoude afteekenen. Bij een tusschengeval, een eiland, bepaalt men door die lijnen den vorm, dien het bij verschillende hoogten van het omgevende water zoude verkrijgen; hetzij die hoogten werkelijke of denkbeeldige zijn.

2. Dr. W. WOLKENHAUER heeft in de Deutsche Rundschau

für Geographie und Statistik, München, 1879, Bd. I, S. 589—598, deze methode besproken in eene verhandeling »zur Geschichte der Tiefenmessungen", en daarin als uitvinder dier niveau-lijnen voor den zeebodem aangewezen den franschen ingenieur PHILIPPE BUACHE (geb. 7 Febr. 1700 te Parijs en aldaar 27 Januari 1773 overleden, Géographe du Roi, en lid der Académie des Sciences de Paris). Deze had in 1737 eene kaart vervaardigd van het kanaal de la Manche, waarop hij van 10 tot 20 vademen de gelijke diepte der zee aangaf, ten einde het verband tusschen de gebergten in Frankrijk met die in Engeland aan te toonen. Zij werd gegraveerd achter eene verhandeling »*ESSAI DE GEOGRAPHIE PHYSIQUE, Où l'on propose des vûes générales sur l'espèce de Charpente du Globe, composée des chaînes de montagnes qui traversent les mers comme les terres; avec quelques considérations particulières sur les différens bassins de la mer. & sur sa configuration intérieure*", opgenomen in de »Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences, Année 1752, page 399—416." Die kaart komt aldaar voor als Pl. XXV, onder den titel »*CARTE PHYSIQUE et PROFIL du CANAL de la MANCHE* et d'une partie *de la MER du NORD, où se voit l'état actuel des profondeurs de la MER, Avec les* Terreins *de FRANCE et d'ANGLETERRE, dont les Eaux s'ecoulent directement dans ces MERS, depuis les différentes* Chaines de Montagnes, *Dressée en* 1752. *Par* Philippe Buache". Links onderaan komt het volgende voor. »Avertissement. *L'Auteur presenta en* 1737 *à l'Acad^e. des Sc. ce Plan Physique de la* Manche, *en manuscrit, et celui de l'*Ocean *vers l'Equateur, pour montrer comment se font les jonctions des* Terres, *soit prochaines, soit éloignées*". BUACHE voegt daarbij (page 415) »L'usage que j'ai fait des Sondes, & que personne n'avoit »employé avant moi pour exprimer les fonds de la mer, me »paroît très-propre à faire connoître d'une manière sensible »les pentes ou talus des côtés, & en même-temps les espèces »de lits que cette méthode me donne, & qui nous conduisent »par degrés jusqu'aux fonds des bassins de la mer".

BUACHE komt op zijne methode terug in eene verhandeling, opgenomen in het volgende deel van de Mémoires de Paris, Année 1753, p. 586—588, »*PARALLÈLE DES FLEUVES DES*

QUATRE PARTIES DU MONDE, Pour servir à déterminer les hauteurs des montagnes du Globe physique de la Terre, qui s'exécute en relief au dôme du Luxembourg." Hij maakte toch eene globe van tien voet middellijn, waarop de bergen en relief waren voorgesteld, en dit evenzeer op den bodem der zee was toegepast. Daarin spreekt hij over het gebruik zijner lijnen bij bergen. »De cette façon, au lieu de supposer l'abais»sement des eaux pour découvrir le terrein [sic] qui foit la »liaison de l'Angleterre avec la France, je ferai le contraire »sur le globe physique; car en supposant les élévations des »eaux au dessus du niveau réel de la mer, on apercevra les »terres qui se couvriroient par l'augmentation successive du »volume des eaux."

3. Later is deze methode gebruikt door den franschen ingenieur DUCARLA, die daarover in 1771 aan de Fransche Akademie schreef. Deze wordt wel als de uitvinder beschouwd: en zelfs heeft, zooals beweerd wordt, BUACHE, die toen nog leefde, verklaard, dat eene graphische voorstelling van niet vlak terrein niet in zijne bedoeling had gelegen. BUACHE was toen echter bejaard, en naar het schijnt, wat afgeleefd; zoodat men alle recht heeft, aan zijne vorige geschriften van N°. 2 meer gewicht toe te kennen; en deze geven, dunkt mij, aan dien schrijver wel degelijk het recht van prioriteit.

4. Deze bewering van WOLKENHAUER (zie N°. 2) werd bestreden door den Heer JOSEPH. L. LÍČKA. Assistent der Geodäsie a. d. k.k. böhm. techn. Hochschule zu Prag, in de »Zeitschrift für Vermessungswesen von Dr. W. JORDAN, 1880, Seite 37—50." Deze haalt aan »Bardin, la Topographie enseignée par des plans-reliefs et des dessins, Paris 1855" (Prix 200 Francs), en »Aperçu historique sur les Fortifications des Ingénieurs et sur le Corps du Génie en France, par le Colonel AUGOYAT. Paris 1860—1864, III vol.", die reeds van onzen landgenoot CRUQUIUS melding maakten. In het eerste werk komt eene kaart der Merwede voor van M. BOLSTRA, naar eene vroegere van CRUQUIUS in 1729 uitgegeven.

De oorspronkelijke kaarten had de heer LÍČKA natuurlijk niet gezien, en het scheen twijfelachtig, of die lijnen van gelijk niveau aan MELCHIOR BOLSTRA (geboren in 1704 en in November 1776

te Leiden overleden), dan wel reeds aan NICOLAAS SAMUEL CRUQUIUS (geb. 2 December 1678, overleden 5 Februari 1754 te Spaarndam) toe te schrijven waren. Door de welwillende hulp van onzen verdienstelijken Bibliothecaris, Dr. W. N. DU RIEU, werd ik in staat gesteld de rijke kaarten-verzameling van den Heer BODEL-NYENHUIS door te zien, en gelukte het ons eindelijk, dit punt tot volkomen zekerheid te brengen.

5. Vooreerst de straks aangehaalde kaart [1]).

Deze heeft tot opschrift van het enkele blad:

»*KAART van een gedeelte der RIVIER de MERWEDE van des-zelfs begin (als de Samenkomst van WAAL en MAAS) tot beneden HARDINKSVELD, met de OUDE WIEL en KILLEN*".

Zij loopt aan de westzijde van 51°48'6" tot 51°52'6" en aan de oostzijde van 51°45'6" tot 51°49'12" N.Br., aan de noordzijde van 21°1'48" tot 21°11 18" en aan de zuidzijde van 20°58'24" tot 21°7'54"; en is lang binnen den rand 59 cM. en breed 42 cM.; deze kaart is derhalve niet juist naar het Noorden gericht.

Links boven onder den rand staat: »*de Dieptens op deeze Kaart uitgedrukt zyn gereduceert op een ordin. Laag water, ofte* 158 *duim beneeden het Hardinksvelder Toren peyl, en de Vloeden* 20 *duim daar booven*"; terwijl rechts beneden op een steen, omgeven door wilgen en elzen struiken, geschreven is »*deeze gekopieert uit de Kaart van de Merwede door N. Cruquius*, 1729. *en op Eene coers en maat gebragt als de Kaart van de Maas en Merwede, beginnende van de Noord Zee tot Hardinksveld. Door M. Bolstra.*" Daaronder de »*Maat van Een duizent Rhynlandsche Roeden*", waaruit blijkt, dat de verkleining 1 : 20000 is.

Op deze kaart nu worden in de Merwede, de Maas, de Waal en de Killen, de lijnen van gelijke diepten aangegeven; die op een even aantal niet genoemde eenheden door getrokken lijnen, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 30, 40, 50; die op een oneven aantal door gestippelde, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 25, 35, 45

Men vindt op deze kaart de gaten van de »inundatien van 1658, 1709, 1726, 1728, 1729" en de »*Nieuw Overlaat dyk gemaakt* 1738", als verlenging van »*de Nieuwe Wolferse Dyk*

ofte Inlaag 1593, 1594 en 1595" achter Hardinksveld om: terwijl er verder op voorkomt het »*Project Overlaat door 't Land van Altena*". De kaart is dus van lateren datum dan 1738, denkelijk omstreeks 1740.

6. Bij een daarop ingesteld onderzoek bleek het, dat die kaart eene juiste verkleining was van eene andere in twee bladen [2]); waarvan het eene tot opschrift heeft: »*de Rivier* de *MERWEDE*, van (*ontrent*) [sic] *de* Steenen hoek. *Oostwaards op*, tot *verby het Dorp van* Sleeuwyk *met den* Ouden Wiel *en de* Killen, *die uit de selve na den* Bies-Bos *afloopen. etc.*"; en het tweede: »*de Rivier* de *MERWEDE*, van *even boven het Dorp* Sleeuwyk. *Oostwaards op*, *verby* Gorichem, *en de Mond van de LINGE*, *tot aan desselfs beginsel*, *namentlyk de Rivieren de WAAL en MAAS*, *by* Woudrichem *en* Loevesteyn, *etc.*"

Deze kaarten zijn juist naar het noorden gericht, en bevatten van 51°47'33" tot 51°50'27" »*Latitudo*" en van 20°55'55" tot 21°1'35" en verder tot 21°7'5" »*Longitudo*".

Uit de bijgevoegde schaal blijkt, dat deze kaart juist de dubbele vergrooting heeft van de vorige; bovendien staat daaronder »*de Tien Duysend Roeden van dese Kaarten maken Een Rhynlandse Roede*", zoodat hier de verkleining 1 : 10000, en die der vorige kaart 1 : 20000 is. Bovendien staat bij de aansluiting van het eerste blad aan het tweede, dwars over de Merwede, bij de cijfers der hier overal getrokken lijnen van gelijk, door cijfers aangegeven, niveau, (de gestippelde lijnen daartusschen hebben geene cijfers) — »A° 1729 *in July Voeten diep beneden 't lage Water*"; waaruit blijkt, dat de bij de vorige kaart nog onbekende eenheden hier, en derhalve evenzeer daar, voeten zijn.

Nergens komt op deze kaart de naam van den maker voor; maar de volstrekte gelijkenis met de vorige, de overeenkomst van den vorm der lijnen van gelijk niveau, dringen tot het besluit, dat dit de bedoelde kaart van 1729 is; terwijl hier niet alleen de Project overlaat door 't Land van Altena, maar ook de nieuwe overlaat achterom Hardinksveld, beide door gestippelde lijnen zijn aangegeven; de laatste was dan ook in 1729 slechts in project, maar in 1738 reeds uitgevoerd.

Een derde bewijs van de identiteit dezer kaart is geree-

delijk te putten uit de in N°. 4 aangehaalde groote kaart van de Maas en Merwede, van de Noordzee tot Hardinksveld. Daarbij komen onderscheidene kartons; en op eene daarvan eene verkleinde afbeelding van de kaart van CRUQUIUS; en deze is volkomen gelijkvormig aan de hier beschreven kaart. Over deze groote kaart handelen wij later.

7. Maar onafhankelijk van al deze niet rechtstreeksche bewijzen, is het mij gelukt er een rechtstreeksch op te sporen, dat de identiteit buiten twijfel stelt.

H. Ed. Groot Mogenden, de Heeren Staaten van Hollandt en Westvrieslandt committeerden bij Resolutie van 10 Mei 1729 de Professoren in de Philosophie en Mathesis op de Universiteyt te Leiden, 'SGRAVESANDE en WITTICHIUS, en den Landmeeter CRUQUIUS tot eene inspectie van de Rivier de Merwede van Gornichem af benedewaarts Deze zonden eene Missive met Bijlaagen, gedateerd te Leiden 8 July 1730, welke werden opgenomen in de Resolutien van H. Ed. Gr. Mogende van 12 July 1730, blz. 553—582, met drie kaarten; en welk stuk ook afzonderlijk is uitgegeven onder den titel »Rapport van de Professoren 'SGRAVESANDE en WITTICHIUS en van de Landmeeter CRUQUIUS, wegens haare gedaane inspectie van de Rivier de Merwede van Gornichem af benederwaarts, en wegens de voorgeslaage middelen tot voorkooming van inundatien. 33 blz. folio met 3 kaarten" [3]).

Van deze drie kaarten, alle 62 cM. lang en 52 cM. hoog, die derhalve door CRUQUIUS vervaardigd werden, zijn de beide eerste geene andere dan juist de beide bladen, in N°. 6 beschreven. Ook de derde, die daarbij behoort, komt in de verzameling BODEL-NYENHUIS voor, en is merkwaardig genoeg, om ze afzonderlijk te beschrijven.

Zij is in reepen verdeeld. De bovenste heeft tot opschrift »N°. 3. *Caarte ofte Afteeckening Van de RIVIER DE MERWEDE Van GORICHEM af benedenwaarts etc.*", waarvan de schaal is 1 : 50.000; hierop komen de lijnen van gelijk niveau niet voor. De tweede heet »N°. 2. *Doorsnydingen van* DE RIVIER *omtrent den ouden Wiel*"; de zes doorsnijdingen zijn geteekend op de schaal 1 : 2000. Daarop volgt de derde over 495 mM. der breedte. »N°. 5. *Hoogte van den Dyk benoorden*

de MERWEDE; *ten aanzien van 't Waterpas, van de Rivier, en van 't Polder-Land, daar benoorden: tusschen 't Dordrechtse (of Papendrechtse) en 't Loevesteynse Veer*". De schaal is 1 : 10000, doch de lootlijnige afstand is 500 maal grooter. »*Dit Profil dan aanmerckende* 500 *maal langer uitgetrocken te zyn, vertoont zig alles is de ware Proportie.*"

Links van de laatste reep, en als onderste reep voor de geheele breedte, zijn nog twee kartons aangebracht. Het eerste geeft de »WATER-BEWEGING, *aan 't Hoofd te Hardinks Veldt Waargenomen*" en de »*SNELHEIT van STROOM*"; geheel bepaald naar de regels van de thans algemeen gebruikte graphische methode, waarbij de tijd door de abscissen, de Vloed, de Ebbe, en de Snelheid door ordinaten worden voorgesteld.

Het tweede karton draagt tot opschrift »*de Daaglykse Hoogte van 't* HOOGSTE *en 't* LAAGSTE WATER *in de* RIVIER, *op de Aangeteekende Maanden en Dagen, aan 't Hoofd te Hardinks Veld in 't Jaar* 1729 & 1730 *voor 't meerendeel Waargenomen, en de overige tot het Water van Hardinks Veld gereduceert, Waar door met behulp van 't Bovenstaande op yder Oogenblik, de Hoogte van 't Water, in Relatie van Dyk en Landen, op alle de Plaatsen langs de bovenstaande Rivier by-na kon werden gevonden.*"

Hier zijn de dagen van 1. Junius 1729 tot 31. Martius 1730 als abscissen genomen; en de »*Rhynlandsche Voeten beneden 't Hardinks Veldse Tooren Peyl*", van 5 tot 15 als ordinaten bepaald, geheel naar de vermelde graphische methode.

8. Laat ons nog even terugkeeren tot het zoo pas aangehaalde Rapport van 'S GRAVESANDE, WITTICHIUS en CRUQUIUS. De Resolutie van 10 Mei 1729, waarbij deze heeren gecommitteerd werden, had zijnen oorsprong in de zware overstroomingen van den winter 1729 Vandaar ook de »vier Pointen" die in het Rapport worden behandeld.

»Eerst.

Den staat van de Rivier de Merwede, zo op haar zelve geconsidereert, als met relatie tot de aanleggende Dijken en naburige Landen, van Gornichem af benedewaarts tot Dordrecht toe.

Ten tweede.

De gevolgen uit de tegenwoordige Constitutie te duchten, en zulx wel met relatie, 1. tot de Inundatien; 2. tot de Navigatie.

Ten derde.

De remedien welke wy (onder correctie) zouden vermenen dat tot voorkominge van Inundatien zouden konnen worden in het werk gestelt.

Ten vierde.

De middelen waar door de Rivier, met Relatie tot de Navigatie (zo ons voorkomt), zoude konnen worden verbetert."

De uitkomst van het onderzoek was het voorstel van een der beide overlaten op de kaart van CRUQUIUS (zie boven N°. 5), waarvan de voor- en nadeelen »en zulx: 1. Ten aanzien van de kosten. 2. Met relatie tot het te hopene effect", werden overwogen, met deze einduitkomst, dat de overlaat ten Noorden (dus die welke in 1738 werd gemaakt) aanbevolen werd.

Ten aanzien van onze lijnen van gelijk niveau, hier van gelijke diepten, vindt men slechts een paar woorden, en wel op blz. 554, waar men het volgende leest.

»De Linien in de Rivier getrokken, met de getallen daar »by genoteert, wyzen overal de Dieptens aan; zo dat door deze »Kaarte de regte constitutie van de Rivier, zo als wy deselve »in de maanden van Juni en Juli des voorledenen jaars heb»ben gevonden, in allen deelen word aangewezen;"

Dat dit Rapport niet zonder tegenspraak bleef, blijkt uit de Bijlagen, vier in getal.

Blz 582—594. »A. *Memorie, vervattende de reedenen, observatien en raisonnencenten over het subject der middelen, om de Stad van Gorinchem, het Land van Arkel en den Alblasser Waard te bevryden van inundatie, by opstoppinge van de Rivier de Merwede door Ysdammen, gemaakt en overgegeven by de Heeren Burgemeesteren en Regeerders der voorschreeve Stad Gorinchem, mitsgaders Dijkgraaf en Heemraaden van het Land van Arkel aan de Heeren 's Gravesande en Wittichius, Professoren in de Philosophie en in de Mathesis op de Universiteit tot Leiden, mitsgaders Nicolaas Cruquius, Mathematicus en Landmeeter tot Delft, als tot het inspecteeren en examineeren*

der Riviere, en de voorgeslaage middelen tot bevrydinge van de Stad en Lande voor inundatien, by haar Edele Groot Mog. gecommitteert zynde." Niet gedateerd.

Blz. 594—597. »B. *Nader en specificq Concept, of Project, van de te maaken overlaat in den Dijk tot Sleuwijk, gemaakt en overgegeeven by de Heeren Burgermeesteren en Regeerders der Stad Gorinchem, mitsgaders Dijkgraaf en Dijkheemraaden van den Lande van Arkel, den* 19 *Juny.* 1729."

Blz. 598—610. »C. *Generaale Consideratien, by Dijkgraaf en Heemraaden 's Lands van Altena, opgestelt ter wederlegginge van het verzoek van de Heeren Drossaard en Burgermeesteren der Stad Gorinchem, mitsgaders van Dijkgraaven en Heemraaden van den Lande van Arkel en den Alblasser Waard, ten einde omme over den Dijk van den ouden Altenaaschen Polder een Overloop van Waater te maken.*" Gedateerd »17 Augusty 1729."

Blz. 610—621. »D.. *Remarques van Burgermeesteren en Regeerders der Stad Gorinchem, mitsgaders Dijkgraaf en Heemraaden van den Lande van Arkel, op de Generaale Consideratien van Dijkgraaf en Heemraaden s' Lands van Altena, tot pretense wederlegginge van het versoek by de gemelde Burgermeesteren en Regeerders der Stad Gorinchem, mitsgaders Dijkgraaf en Heemraaden van den Lande van Arkel voorschreeven gedaan, ten einde omme over den Dijk van den ouden Altenaschen Polder een Overloop van Waater te maaken, aan de Leeden van haar Edelen Groot Mog. Vergaderinge gedistribueert en overgegeeven in de maand October deeses jaars* 1729."

Daarop schreef CRUQUIUS »Aanmerckingen over den Tegenwoordigen, Slegten-, Toestandt van de Rivier de Merwede. 'sGravenhaage. 1731. folio, 26 bladz." [4]), die door Burgem. en Reg. van Gorinchem werden bestreden.

In de Vergadering van HEd. Gr. Mog. van 14 Juny 1731 (zie blz. 330) werd daarop eene resolutie genomen tot het hervatten van de Besoigne van Gecommitteerden ter naadere voldoening van de Resolutie van 10 Mei 1729, op grond van »het geschrift (hier boven vermeld) door den voorschr. Landmeeter, in verscheyden respecten daar van (van het vorige Rapport namel.) discrepeerende . . . mitsgaders . . . van de We-

derlegging (van dat geschrift) door Burgemeesteren en Regeerders der Stad Gornighem (sic) en door Dijkgraaf en Hoogheemraaden van de Lande van Arkel."

Later verscheen nog »Destructive Remarques op de abusive Aanmerckingen van N. CRUQUIUS van 17 January 1731 1735, folio, 12 blz." [5]).

9. Thans komt de groote kaart van BOLSTRA aan de beurt, die reeds in N° 5 en 6 vermeld werd [6].

Zij bestaat uit vijf bladen, die met de kartons alle 71 cM. hoog zijn; de beide eerste zijn 585 mM. lang, de beide volgende 50 cM., het laatste is 70 cM. lang.

Het eerste blad bevat van den onderrand tot het karton van 51°56'53'' tot 52°2'0"; het laatste van het onderste karton tot den bovenrand van 51°44'10" tot 51°49'24" N.Br. De noordkant loopt over alle bladen van 20°15'24" tot 21°2'30", de zuidkant van 20°11'0" tot 20°58'12" Lengte. Hieruit blijkt dus, dat de kaart niet zuiver zuid-noord is gericht.

Het bovenste karton voor het eerste blad, het bovenste voor het tweede, en het onderste voor het vijfde blad, komen somtijds te zamen op een afzonderlijk blad voor. Dit is het geval bij het exemplaar uit de verzameling van BODEL NYENHUIS, dat nu beschreven zal worden

Het eerste blad, in dezen vorm slechts 53 cM. hoog (even als het tweede blad), heeft aan den bovenrand twee kartons naast elkander; het eerste geeft het »*Profil der Doorsnyding uyt de Pan tot in de Noord Zee*"; deze wordt op de kaart aangeduid als »Concept-Doorgraving van N. Cruquius"; zij beoogde de afsnijding van den »Hoek van Holland". Het tweede karton heeft tot titel »*Het Product der Peylingen op de Hoek van Holland binnen in de Pan, en daar buyten in de Noord Zee, volgens Waarneminge in de Maand September* A°. 1738", naar de graphische methode. Tegen den onderrand is een steen afgebeeld, dragende aan de bovenzijde de schaal (waaruit blijkt dat de verkleining is 1 : 20000) en aan de voorzijde het opschrift: »*de Ordinaire Ebbe in de Noord Zee voor de Mond van de Maas, valle lager dan de Dieptens die op deese Kaart staan uytgedrukt Vier en twintig Rhynlandse duymen, en de Vloeden dertig duym daar en boven; alles volgens waarne-*

minge gehouden sedert Nov 1738, *tot Nov.* 1739, *door M. Bolstra.*"

Het tweede blad bevat, boven aan links, twee kartons onder elkander. Het bovenste heet: »*Vergelijking van de Maas aan het Brielse Hoofd, met de Noord Zee, tot Katwyk;*" het onderste »*Hoog Water van de* MAAS *aan het* BRIELSE HOOFD."

Het vierde blad heeft een karton aan de benedenkant voor de geheele lengte van het blad, met het opschrift »*Vergelyking van de Maas aan het Brielse hoofd, met de Merwe te Dordrecht aan de Rietdykse haven, van Novembr.* 1739 *tot Nov.* 1741."

Het vijfde blad heeft rechts onderaan twee cartons boven elkander. Het bovenste geeft de »*Gemiddelde maandelykse waarnemingen, van de Rivier de Merwede in duimen; boven het Amsterdamse Peyl*"; waarnevens het »*BERIGT. de Ordinaire Vloeden en Ebben aan de Kop komen na-genoeg over een met die te Dordrecht. het Peyl daar deese Gronden na zyn in kaart gebragt is te Dordrecht, en aan de Kop, op 't Amsterdamse Peyl; dat verhogende tot Hardinksveld op* 40 *duim daar booven; ofte* 146 *duim beneeden 't Toren-peyl, aldaar; zynde na-genoeg gelyk met de Ordin. Ebben en de Vloeden* 16 *duim daar booven — te zien in deez' nevensgaande Tafel, meeting, peyling, karteering enz. by my M. Bolstra.*"

Het tweede is »*Afbeelding in Figuur, van de Vloeden en Ebben der Merwede, van Verscheide maanden; zo te Dordrecht als tot Hardinksveld.*" Beide loopen van Augustus 1739 tot Junij 1741.

Alle vorige kartons zijn naar de graphische methode bewerkt.

Op deze kaart komen onze lijnen weder voor, geheel in denzelfden zin behandeld, als bij de kaarten van N°. 4 en 5.

Nog hebben wij het blad, waarop de kartons voorkomen, die bij de vorige vijf bladen behooren.

Het eerste, dat boven het eerste blad behoort, bevat eerst den titel »KAART VAN DE BENEEDEN RIVIER DE MAAS EN DE MERWEDE, VAN DE NOORD ZEE TOT HARDINKSVELD" en dan den »*Tyd van 't Hooge (en 't Laage) water met Nieuwe ofte Volle maan op de Bovenstaande Plaatsen in Uuren en minuten.*"

Het tweede karton geeft »*Gemiddelde Vloeden (en Ebben)*" voor het tweede blad.

Beide kartons zijn naar de graphische methode bewerkt.

Het derde karton bevat »*de Vyf Blaaden van de Maas en Merwede in een Generaale Kaart door M. Bolstra*", op eene schaal van 1 : 80.000. Daarop is een kleiner karton aangebracht »*de Twee Blaaden van de Rivier de Merwede door N. Cruquius dus gecopieert en Verklynt door M. Bolstra*", op eene schaal van 1 : 80.000. Op beide kartons zijn wederom de lijnen van gelijk niveau overgebracht.

Voegt men dit kleine karton naast het grootere, waartoe beide zijn ingericht, dan wordt de titel gewettigd, die boven het grootere voorkomt »KAART VAN DE BENEEDEN RIVIER DE MAAS EN DE MERWEDE VAN DE NOORD ZEE TOT GORINCHEM."

Dit derde karton is door ISAAC TIRION gecopieerd, en opgenomen in de »HEDENDAAGSCHE HISTORIE OF TEGENWOORDIGE STAAT VAN ALLE VOLKEREN;" XVIIe DEEL, AMSTERDAM, 1749, 8°.; en wel tegenover bladz. 348; de lijnen van gelijk niveau zijn daarop echter weggelaten, hetgeen, bij de hier behandelde vraag, op een dwaalspoor zoude brengen.

10. Wanneer niet in N°. 7 het rechtstreeksche bewijs geleverd was, dat de lijnen van gelijk niveau aan CRUQUIUS toe te schrijven zijn, zoude men dit nog kunnen aantoonen door een beroep op eene kaart van CRUQUIUS van het jaar 1733 [1]), waarvan de titel, boven de kaart aangebracht, dus luidt:

»*Het Eylandt West-Voorn of* GOEDEREEDE *met de Dieptens en Droogtens Ronds-omme tot aan Den Hoek van* HOLLANDT, *etc. Volgens Order van Haar Edele Groot Mogende, de Heeren Staaten van Holland & West-Vrieslandt, Gemeeten, Gepeylt en Op Voetmaat in Kaart Gebragt, bezuyden het Eylandt in Maart* 1729, *en daar benoorden in de Maanden July* 1731. *en* 1732, *door den Landmeeter Nicol. Cruquius; en Vervolgens in 't Koper door David Coster, en Gelettert door Claas Kondet. Anno* 1733".

Deze omvat van 51°44'30" tot 52°2'42" Latitudo en van 19°57'18" tot 20°22'42", en is dus juist naar het Noorden gericht. Zij is binnen den rand lang 525 mM. en 6 dM. hoog.

Op deze kaart komen weder dezelfde lijnen van gelijke diepten voor; maar hier, even als later bij BOLSTRA, zijn die voor evene getallen getrokken, en die voor de onevene gestippeld.

Tegen den west-rand komen de schalen voor, waaruit blijkt dat de verkleining is als 7 : 37500. Links boven is een gelijkzijdige rechthoekige driehoek afgesneden, waarvan de rechthoekszijden 39 cM. lang zijn. Van boven af gerekend, komen daarop de volgende kartons voor.

De bovenste heeft tot titel »*De Noord-zijde van* GOEDEREEDE, *tusschen de Wooninge Zee-Zicht en 't Houten-Hooft, aan 't Oost Eynde van de Haven*" op vijf maal grooter schaal. Hier vinden wij onze lijnen weder voor de diepten 5 tot 45, evenzeer getrokken en gestippeld als boven.

Het volgende, op eene wederom drie maal grootere schaal »*Toestandt van* DEN QUAADEN-HOEK *in July* 1732, *op grooter Voetmaat als hier boven*", met een *Profil van de Linie A*, op dezelfde schaal als 't vorige karton.

Daaronder »*de Wyze van 'T* VALLEN EN *'T* RYSEN *des Waters, by Ebbe & Vloedt aan de Haven*", naar de graphische methode.

Onder aan nog »*Wyzing van* DE MAGNEET-NAALDE, *op Goedereede* in Maart 1729 bevonden 14 *Graden Noord-Westering.*"

Een gedeelte dezer kaart, bevattende het Haring-Vliet met de bijbehoorende oevers van Voorne en Over Flacqué komt later gecopieerd voor in een kaartje `), gericht ZW. naar NO., met het bijschrift »*Copie uit de* Kaart *van* Goede-reede *door N. Cruquius* 1732." Ook hierop komen dezelfde lijnen van gelijke diepten voor, die men op de bovenvermelde oorspronkelijke kaart van CRUQUIUS vindt.

11. Hoezeer de methode der lijnen van gelijke hoogten eenvoudig genoeg is, om te onderstellen, dat zij ook vóór 1726 bekend was, heb ik, niettegenstaande een nauwgezet onderzoek, daarvan nergens iets kunnen opsporen.

Bij het inzien van eene verhandeling van den ingenieur F. W. CONRAD, voorkomende in de Notulen van het Kon. Instituut van Ingenieurs 1848—1849, blz. 202, met de Bijlage XXIII, is bij mij een vermoeden gerezen. In die verhandeling

toch worden de lotgevallen nagegaan van een voorstel van onzen CRUQUIUS tot het opmaken eener algemeene waterstaatskaart van ons land, beginnende met zijn brief aan Prof. LULOFS, 14 October 1725, en eindigende met een Rapport van H. Ed. Gr. Mogende van 18 Maart 1728.

Niet onwaarschijnlijk komt het mij voor, dat CRUQUIUS bij het opmaken van zulk eene kaart, waarbij de hoogten der verschillende plaatsen natuurlijk een hoofdrol moesten spelen, tot de gedachte gekomen is van eene graphische voorstelling door middel van die lijnen van gelijke hoogten, en dat hij toen die methode heeft toegepast bij het onderzoek, vermeld in N°. 7.

12. Van denzelfden NICOLAAS CRUQUIUS bezitten wij nog de terecht beroemde kaart van het Hoogheemraadschap van Delfland [9]). Zij is verdeeld in 25 bladen, dat is vijf bladen hoog, en evenzeer vijf breed. Bovendien behooren daarbij twee bladen voor den titel en een verzamelblad, dat het geheel voorstelt, en waarvan hier de beschrijving moge volgen.

De onderzijde loopt van 51°51'20" tot 52°2'25"; de bovenzijde van 51°59'20" tot 52°10'30" N.Br., zoodat de kaart bijna Noord-Oost gericht is.

Ter linkerzijde komen de namen en wapens van vijf hoogheemraden voor; evenzeer vier ter rechterzijde, en daaronder een wapenschild met het octrooi »DE STATEN VAN HOLLANT EN WESTVRIESLANT *Consent: Accord: en Octroyerē* Dijkgraaf en Hooge Heemraden van Delflant *dese Nieuwe Kaerte Alleen te doen Drucken, etc. Gegeven in den Hage d.* 15 *Maart* A°. 1712. A. Heinsius *vs. ter ordonnantie van de staten* Simon van Beaumont." Daaronder staat verder »'T HOOGE HEEMRAEDSCHAP VAN DELFLANT met alle deszelfs deelen, op Voetmaet in zyn Geheel, en in de volgende vyf en twintich Stucken naukeuriger IN KAART GEBRACHT. A°. MDCCXII."

Boven de kaart staat als hoofd:

»'T HOOGE HEEMRAED SCHAP VAN DELFLANT."

Eene tweede uitgaaf bevat dezelfde verzamelkaart met het bijvoegsel rechts onderaan »Dus Verhelderd A°. 1750." Deze verheldering bestaat in de aanteekening van eene menigte ondergeloopen land ten N.O., O. en Z.O. van Delft. Het ineen

loopen en daardoor zich vergrooten der veenplassen maakte de verandering noodzakelijk in dit verzamelblad. Hierbij zijn de veranderingen aangebracht, die er in dit oppervlak van het hoogheemraadschap hadden plaats gegrepen; en evenzeer nu de wapens en namen der nieuwe hoogheemraden ter zijde aangegeven.

Bij deze kaarten vond ik eene schriftelijke aanteekening van Prof. MACQUELIJN. »CRUQUIUS, Landmr. heeft gemaakt de Kaart van Delfland; ook die van Vriesld. (exeunte S. XVII). De eerstgen. is zeer fraai daarna gegrav., maar, van de teekenen, die op de kaart staan, mist men de verklaring, wijl van dit laatste blad het koper, voltooid of half voltooid, is verloren gegaan. Het 1e vereenigingsblad van CRUQUIUS kaart heeft men zelfs bij 't Hgheemrdsch. van Delfland niet; want het is later met veranderingen overgegraveerd, 1750."

Een nader onderzoek omtrent deze punten heeft aangetoond, dat er van deze geteekende kaarten van CRUQUIUS te Delft niets voorhanden was; dat dus de vermelde kaart van Friesland (die ook nergens anders vermeld wordt) aan een lapsus calami is toe te schrijven; dat thans de verzamelkaart van 1712 wel te Delft voorhanden is; en dat daar van het verloren gaan van een koperen plaat niets bekend is.

Men vond er slechts de volgende beschrijving van de in die dagen gewone, rondom de kaart aangebrachte versieringen.

»'t Al oude Adelyke wapen van Delfland, pronkt op het voorhoofd van deze landkaart.

»De zorg der Hemels sit 't Haerder bescherming ter Eener, ende de voorsigtigheijt met hare Sluyskroon en Slangespiegel, ter andre zijde aenwijsende 't Hoogheemraedschap, welker eere wapenen, dese kaert cieraat bijzetten.

»De Meetkunde met hare werktuigen sit aen de voet van het pijlaster, ter eener zijde de verbeelding van den lantbouw en aen de andre kant de visserij, jagt etc., verbeeld door kindertjes, op de onderlijst, elk in noeste en vrolijke besigheid, bij het geklater der waterwielen, terwijl de dankbaerheijt haer wierook swaeijt, om het outaer aen het voetstuk van 't pijlaster; waer in hare WelEdelheits wapenen gebeelthoud vertoont werden om derselver naem en gedagtenisse aen de eeuwigheijt te wijen."

En dit is misschien hetgeen de Heer MACQUELIJN met het vermiste bedoelt.

Wegens de zeldzaamheid van die eerste verzamelkaart mogen hier de namen der Hoogheemraden in beide jaren volgen.

In 1712. d'Heer en Mr. Jacob Vredenburch van Adrichem, Raedt en Out Burgemeester der stat Delft, Hoogbailjuw en Dykgraef van Delflant.

d'Heer en Mr. Antony van der Heim, Raedt en Meester van de Rekeningen der Domeinen van de Heeren Staten van Hollant en West-Vrieslant Raedt der Stat Delft, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Franco Pauw, Secretaris van de Rekenkamer van Hollant, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Jacob Meerman, Secretaris van 't Hooge Heemraedschap van Delflant.

d'Heer en Mr. Adriaan Boogaert van Beloys, Penningmeester van de Oost Ambachten.

d'Heer en Mr. Simon van Beaumont, Secretaris van de Staten van Hollant en West-Vrieslant, Hoogh Heemraedt.

Heer Jan van Ruytenburch, Heer van Vlaerding en Vlaerdinger Ambacht, Raedt ter Admiraliteyt van West-Vrieslant en de Noorder Quartieren, Hoogh Heemraedt.

Heer Willem Lodewyck Baron van Wassenaer Heer van Ruyven van Maeslant en Maessluys, Raedt ter Admiraliteyt op de Maese, Hoogh Heemraedt.

d'Heer Gerard van der Esch, M. Dr. Penningmeester van de West Ambachten.

En in 1750.

d'Heer Abraham van Bleyswyk, C. F. Raedt en Oud Burgemeester der Stadt Delft, Gecommitteerde Raedt van de Heeren Staten van Hollandt en West Vrieslandt, Dijkgraef van Delflandt.

Heer Carel Baron van Wassenaer, Heer van Daeveren, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Paulus Teding van Berkhout, Raedt en Oud Burgemeester der stadt Delft, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Quiryn van Beaumont, Raedt der stadt Delft, Secretaris.

d'Heer en Mr. Adrianus van der Goes, C. Z. Penningmeester van de Oost Ambachten.

Heer Cornelis Baron van Aerssen, Heer van Voshol, Hoogh Heemraedt.

Heer Willem Baron van Wassenaer, Heer van Ruyven, Hoogh Heemraedt.

Heer Arnout Joost van der Duyn, Heer van Maesdam, Luytenant Generael van de Cavallery, Hoogh Heemraedt.

d'Heer en Mr. Willem Quarles, Penningmeester van de West Ambachten.

13. NICOLAAS SAMUEL CRUQUIUS, ook KRUIK genaamd, werd 2 December 1678 te Delft geboren en overleed 5 Februari 1754 te Spaarndam, alwaar hij in de Hervormde kerk begraven ligt; in het grafschrift, door hem zelven vervaardigd, geeft hij aan, dat hij een afstammeling in den 16den graad is van Graaf WILLEM II. Hij was candidaat in de Medicijnen, en werd Examinator der stuurlieden van de Oost Indische Compagnie te Delft, later Landmeter van Rijnland, en daarna Schout van Spaarndam; ook was hij lid van de Hollandsche Maatschappij te Haarlem en van de Royal Society te London. Den 28sten Maart 1716 werd hij aan de Hoogeschool te Leiden ingeschreven als Krukius, student in Medicijnen, geb. te Delft, 36 jaren.

Behalve de bovengenoemde kaarten, en vele andere, die niet in druk uitkwamen, schreef hij nog:

Tafelen van Sons op- en ondergang. Leiden (A. Sylvius) 1727. 8°.

Waarvan later in 1731 eene fransche vertaling [10]) door hem aan HERMANNUS BOERHAAVE werd opgedragen.

Loop en Plaats der Planeeten uyt den Aardbol voor 1729 [11]) en ook voor 1732 [12]). Leiden in plano.

Aurora en Vesper, den opgang en ondergang der Zonne. Haarlem 1735. 8°. [13])

Tegenwoordige Miswijzing der Compassen. Haarlem 1738. 8°. [14]).

Zonnewijzer in plano.

Tractaatje over de Waterpassingen en Peilingen aan en

omtrent de Rivieren de Merwede, den Goudsen Yssel, Noord- en Zuider-Zee, enz.

Zijne kleinere geschriften werden later in twee deelen bijeenverzameld.

Zijn zinspreuk was, met zinspeling op zijn naam: Scientia neminem cruciat.

14. De andere landmeter, in dit stukje voorkomende, MELCHIOR BOLSTRA, werd in 1704 geboren en overleed te Leiden, in November 1779. Sedert 1 Oktober 1731 was hij Landtmeeter van Rhijnlandt, en werd 18 Maart 1732 als student in Mathesis, oud 28 jaren, te Leiden ingeschreven. Van zijn hand verschenen er, behalve de bovenvermelde, nog onderscheidene andere kaarten.

15. Vooreerst zijn groote Atlas van Rhijnlands Waterstaat [15]) in folio. Zij bevat twaalf dubbele bladen kaarten N°. 1—12, waarvan er op vier rijen telkens drie naast elkander behooren te liggen; bovendien een dubbel blad voor den titel, een voor de sluizen, en een voor de verzamelkaart.

Deze laatste loopt van 52°13′ tot 52°24′20″ N.Br. en van 20°29′ tot 21°0′10″ Lengte.

Links boven bevat een schild het volgende.

AFBEELDINGE van *RHYNLANDS WATERSTAAT ten Opzigte van 't VERGROOTEN der HAARLEMMER of LEYDSE MEER met de byna GECOMBINEERDE en OMLEGGENDE VEENPLASSEN, op ordre van de Wel Eedele Heeren DYKGRAAF en HOOG HEEMRAADEN van RHYNLAND. Door derzelver ordinaris Landmeeter Melchior Bolstra. NB. de Oevers geteekent met de Jaargetallen* 1531. *en* 1591. *zyn getrokken uyt de kaarten der Voorz.: Meer, in Druk uytgegeeven by de Eedele groot Agtbaare Heeren der stad Leyden. Anno* 1610 *uyt de oude Rhynlands Kaart. Ao.* 1647 *en* 1687. *uyt de Tegenwoordige Groote Rhynlands Kaart, en Ao.* 1740 *volgens Meetinge: Ao.* 1739 *en* 1740 *gedaan by my ondergeschreeven Landmeeter. M. Bolstra.*

Rechts beneden staat een ander schild, waarboven de *Maat van* 1000 *Roeden*, waaruit blijkt dat de schaal is 1 : 10000. Op dit schild komt voor de belangrijke opgaaf der in verschillende tijden opeenvolgende oppervlakten.

Begrootinge
Getrokken uyt de Bovengemelde Kaarten,
zynde in den Jaare 1531 *groot bevonden*
gereekent zynde in Mergens

De Haarlemmer Meer	3040
Leydse Meer	2175
Spiering Meer	850
Oude Meer	520
Monteerende te Saamen	6585.

De voors: vier Meeren te Saamen
Gecombineerde zynde Monteerde als volgd

Anno 1591 *in 't geheel*	12375
1647	17082
1687	18100
in Anno 1739 *en* 1740	19500

En op heeden byna vereenigd zynde met Gecombineerde Veenplassen zal over zulks Monteeren de Numbre van 30000 *Mergens.*

Het daarop volgende dubbele blad is ook merkwaardig; het bevat volgens den titel, die onderaan voorkomt,

Concept, Sluyzen en doorgravingen, om daar door te verkrygen een Meerder Loozing voor Rhynlands Boezem water, uyt den Rhyn tot in de Noord Zee, omtrent Katwyk. Het Product der Maandelykze en Jaarlykze waarnemingen van de hoogte en laagte, de wyze van 't Valle en Ryzen der Noord Zee, en het YE, tot Sparendam, met de Rhynlands boezem tot Leyden. Beschouwing der oppervlakte van Rhynland, ten aanzien van de Ordinaire Vloede en Ebbe, in 't YE en de Noord Zee, op Ordre van de Wel Eedele Heeren Dykgraaf en Hoogheemraden van Rhynland, door M. Bolstra 1740.

Deze kaart bevat, wat de *sluyzen* aangaat »*de Concept Sluyzen* 1629", de »*Concept Doorsnyding en Sluyzen* 1740" en de »*Concept, Doorgraving en Sluys van den Jaar* 1570."

Een karton geeft de »*Beschouwing van de Oppervlakte van Rhynland, met dat van de onbepolderde en bepolderde Landen, beyde in hooge, middelbaar en laage.*"

De drie laatste soorten zijn door watermolens aangegeven, de drie eerste door graanschoven, koebeesten en hooimetten

met een hooivork daartusschen, eigenaardige zinnebeelden van hunne bestemming.

Van de eerste verzamelkaart komt een herdruk [16]) voor, bijna op 1 : 3 verkleind.

Nog bestaat er daarvan een veranderde herdruk [17]) met den titel in een schild boven links aangebragt.

NAUWKEURIGE KAART van de HAARLEMMER of LEIDSE MEER *met Aanwyzing van derzelver byzondere VERGROOTINGEN, en van de omleggende en byna vereenigde VEENPLASSEN. In gevolgen de Kaart daar van gemaakt door M. BOLSTRA, Landmeeter van Rynland, waarby gevoegd is eene aanwysing van het laatste Concept der BEDYKINGE dezer* MEER, *waarvan de Ring is aangeweezen door de Letteren AA tot M. Tot opheldering van den* TEGENWOORDIGEN STAAT DER VEREENIGDE NEDERLANDEN. Uitgegeven door Is. TIRION. 1745.

De opgaven in het schild rechts onderaan komen ook hierop voor.

16. Verder eene kaart van de Merwede van *'t Huis te Merwede* tot voorbij Dordrecht met eenige *Concept Kribbens*. Op deze kaart vindt men weder de vroeger behandelde lijnen van gelijke diepte. Zij is van het jaar 1761.

Dan [18])

KAART VAN DE RIVIER DE LEK, *VAN KRIMPEN TOT HET HAGESTEINSCHE SCHOOR, gedaan op Ordre van de Edele Mogende Heeren Gecommitteerde Raaden van de Staaten van Holland en West Vriesland. door Melchior Bolstra in den Jaare* 1751 *en vervolgens tot in* 1764.

Deze kaart bestaat uit zeven bladen folio. Het vierde blad draagt boven aan den titel

KAART VAN DE RIVIER DE LEK, MET ZYN UITERWAARDEN, NOORDER EN ZUIDER DYKEN, VAN DE MERWEDE BENEDEN KRIMPEN, TOT HET SCHOOR VAN HAGESTEIN BOVEN VIANEN.

Later [19]) de

KAART VAN *DE OUDE MAAS, omtrent de* Lint *en* Krabbe, *met eenige Dieptens en Concept Kribbens, zooals die met de Letters* A, B *en* C *zyn afgetekend, benevens de Coers en strekking des Vaar waters, zoo van Rotterdam op de Krabbe, als van de Krabbe op Dordrecht, zynde de Dieptens in dezen uit-*

gedrukt, Rhynlandsche Voeten, en op de Hoogte van de Ordinre Vloeden gereduceert in Augusty 1770, *door my* M. Bolstra.

In een blad dubbel folio.

Hierop komen alleen voor de punten van bepaalde diepte, die echter niet door lijnen worden vereenigd.

Voorts [20])

KAART van de MERWEDE of NIEUWE MAAS, van den YSSEL tot ROTTERDAM, met de Geprojecteerde Waterwerken A, B en C, ter verbetering van dit Rivier-vak.

De kaart is op een dubbel blad folio. Onder aan rechts staat:

Gepeild en Gereduceerd als vooren Gemeld door MELCHIOR BOLSTRA.

Links beneden staat *L. Schenk Jansz. sculpsit* 1772.

Eindelijk [21])

DE VIER AMBAGTS-POLDER IN RYNLAND. In een blad folio.

Rechts onder aan staat beneden een »REGISTER der groottens van ieder AMBACHT."

Aldus gemeeten, gekarteert en gecalculeert door MELCHIOR BOLSTRA, Ordinaris Landmeeter van Rynland, en het zelve in zyn geheel binnen Dyks afwaterende groot bevonden twee duysent twee en vyftig Mergen, en vier en taggentig Roeden. Zoo als mede de verdere deelen en geheele als in dit bovenstaande Register staan uitgedrukt.

Deze kaart bevat de afkaveling van gemelden polder.

17. Ten slotte nog een woord over BOLSTRA's geschriften.

Verbaal van de Inspectie der Dyken langs de Leck. 1744 [22]).

Hoognoodig onderzoek omtrent de waare oorzaaken van het steeds aangroeyend bederf der Leck. 1749 [23]).

In welke hoeveelheid zijn de Nederlandsche Rivieren sedert den aanvang deeser Eeuwe verzand? Wat is het Middel, om de Zanden en Slikken, die zig op derzelver bodem gezet hebben, van daar te verdrijven; en derzelver meerder verzanding voor te komen. 1754 [24]).

Welke zijn de waare Oorzaaken, dat het Strand bij Petten en de Hondsbosschen sedert eenige Jaaren zo aanmerkelijk is afgenomen? Wat is het beste Middel om het Strand te dier Plaatse te bewaaren en te doen aanwinnen. 1755 [25]).

Bovendien gaf hij met CORNELIS VELSEN:

Consideratien 1745 [26]).

Met AD. MUTSERT:

Nadere Consideratien op het Verbaal van de Inspectie der Dijken langs de Lek. 1749 [27]).

En met JOHAN LULOFS:

Kortbondig Vertoog van het eminente gevaar waarin zich de Provincie van Hollandt bevindt. 1755 [28]).

NASCHRIFT.

Eerst onder het afdrukken van dit stukje konde ik het volgende Rapport machtig worden.

Exposition Universelle de 1878, à Paris. — Section Française. — Ministère de la Guerre-Service du Génie. — Notices sur les objets exposés par le Depôt des Fortifications, dans la Classe XV. Instruments de précision, et dans la Classe XVI. Géographie. — Paris 1878. 64 pages. 8°.

In het »Avant-Propos" wordt over de methode der horizontale doorsneden gesproken, zooals ze door DUCARLA (1771) was voorgesteld. In eene noot (bladz. 8) wordt hier herinnerd aan CRUQUIUS en aan PHILIPPE BUACHE; maar daarbij wordt de meening uitgesproken, dat het niet hun doel zoude geweest zijn, den vorm van de oppervlakten te bepalen (»la définition des formes du sol"); en dat men deze toepassing verschuldigd is aan den franschen ingenieur DUCARLA, die daarover in 1771 aan de Academie des Sciences eene verhandeling aanbood. Deze verhandeling wekte echter eerst de aandacht, toen daarvan in 1782 eene nieuwe uitgaaf verscheen door DUPAIN-TRIEL, die van deze methode in 1791 het eerste werkelijke gebruik maakte. Bij eene latere veranderde uitgave van de verhandeling van DUCARLA in 1804, schijnt DUPAIN-TRIEL nog weinig gevolg van zijne methode te verwachten.

Het bovenstaande heeft mij echter niet teruggebracht van het oordeel in N°. 3 uitgesproken, en blijf ik meenen, dat na onzen CRUQUIUS, en geheel onafhankelijk van hem, wer-

kelijk PHIL. BUACHE de eerste was, die deze lijnen van gelijke diepte of gelijke hoogte gebruikte, om den vorm van de aardoppervlakte aan te geven.

Het kaartje, dat hierachter voorkomt, met het doel om het gebruik onzer lijnen van gelijke diepte duidelijk te maken, is genomen uit het karton, voorkomende op de groote kaart der Merwede door BOLSTRA, en beschreven in N^{0}. 9; op het eind van dit Nr., bladz. 22, komt de beschrijving van dit karton zelf voor.

AANTEEKENINGEN.

---

[1]) *Kaart van een gedeelte der* RIVIER *de* MERWEDE *van deszelfs begin (als de Samenkomst van* WAAL *en* MAAS*) tot beneden* HARDINKSVELD*, met de* OUDE WIEL *en* KILLEN.

Deze is van M. BOLSTRA, 1 blad, denkelijk 1740.

[2]) *De Rivier* de *MERWEDE* van *(ontrent)* [sic] *de* Steenen hoek, *Oostwaards op,* tot *verby het Dorp van* Sleeuwijk *met den* Ouden Wiel *en de* Killen, *die uit de selve na den* Bies-Bos *afloopen etc.* (1e blad).

De Rivier de *MERWEDE,* van *even boven het Dorp* Sleeuwijk, *Oostwaards op verby* Gorichem, *en de Mont van de* LINGE *tot aan desselfs beginsel, namentlyk de Rivieren de* WAAL *en* MASE *by* Woudrichem *en* Loevesteyn *etc.* (2e blad).

Deze kaart in twee bladen is van 1729; en blijkt geteekend te zijn door NICOLAAS CRUQUIUS.

[3]) Rapport van de Professoren 'S GRAVESANDE en WITTICHIUS en van de Landmeeter CRUQUIUS wegens haare gedaane inspectie van de Rivier de Merwede van Gornichem af benederwaarts, en wegens de voorgeslaage middelen tot voorkooming van inundatien. Met Bijlagen. folio. 70 blz. Met 3 kaarten.

[4]) Aenmerckingen over den Tegenwoordigen, Slegten-, Toestandt van de Rivier de Merwede. Door *N. CRUQUIUS.* 's Grav. 1731. folio. 26 blz.

[5]) Destructive Remarques op de Abusive Aanmerckingen van N. CRUQUIUS van 17 January 1731. ('s Grav.) 1735. folio. 12 blz.

[6]) KAART VAN DE BENEEDEN RIVIER DE MAAS EN DE MERWEDE, VAN DE NOORD ZEE TOT HARDINKSVELD.

De kaart in vijf bladen en een blad met karton is van M. BOLSTRA, omstreeks 1742.

[7]) *Het Eylandt West-Voorn of* GOEDEREEDE *met de Dieptens en Droogtens Ronds-omme tot aan Den Hoek van* HOLLANDT*, etc. Volgens order van Haar Edele Groot Mogende, de Heeren Staaten van Holland & West-Vriesslandt, Gemeeten, Gepeyld en op Voetmaat in Kaart Ge-*

bragt, beszuyden het Eylandt in Maart 1729. *en daar benoorden in de Maanden July* 1731. *en* 1732. *door den Landmeeter Nicol. Cruquius; en Vervolgens in 't koper door David Coster, en Gelettert door Claas Kondet. Anno* 1733.

8) *Copie uit de* Kaart *van* Goedereede *door N. Cruquius.* 1732.
Dit kaartje is van 1757, en bevat slechts een gedeelte der vorige.

9) 'T HOOGE HEEMRAED SCHAP VAN DELFLANT met alle desselfs deelen op Voetmaet in zyn Geheel, en in de Volgende Vijf en twintich stucken naukeuriger IN KAART GEBRACHT. A°. MDCCXII.
Deze kaart in 25 bladen, met 2 bladen voor titel, en een verzamelkaart is van N. CRUQUIUS.
Van het verzamelblad komt gewoonlijk de tweede veranderde uitgave voor van 1750.

10)* TABLES || Du veritable Lever & Coucher du Centre du So- || leil dessus & dessous l'Horison natu- || rel du Chateau || de VIEUX POELGEEST || (sur 52 Degrez & 12 Minutes de Latitude vers || le Nord) calculées en Heures & dixiemes par- || ties de Minutes, selon les quelles l'heure & || le mouvement du Pendule peut être exa- || miné & corrigé exactement sans au- || cun Instrument; || Comme aussi || du commencement de l'Aube du Jour, & de la || fin du Crepuscule au Soir, en Heures & Minu- || tes, a cause que cette Connoissance peut || être quelques fois d'utilité. || On se peut servir aussi de cettes Tables || a LEIDEN & en RHYNLAND, || & avec un petit Supplement dans toutes les Vil- || les & Bourgs des Provinces Unies, comme de || même dans les autres parties de l'Europe, || qui sont situées environ sur le même De- || gré de Latitude vers l'Est ou Ouest. ||
Dediées au tres noble, fort celébre & sçavant || Seigneur || HERMANNUS BOERHAAVE || Maître ès Arts liberaux, Docteur en Medecine || & en Philosophie, excellent Professeur || en Medecine, Botanie, & Chemie, || dans l'Université de la Province d'Hollande || a Leide, President du College des Chirurgiens &c. &c. || par son tres humble & tres obeïssant Serviteur || & Disciple || NICOLAAS CRUQUIUS. || Membre de la Societé Royale d'Angleterre.
8°. 37 blz.
Onderaan op blz. 36 staat A LEIDE, || Imprimé par GUILLAUME DE GROOT, || pour ANGE SYLVIUS, Libraire dans || le Doelestraat. 1731.

11)* *Loop & Plaats der* PLANEETEN, *uyt den Aardbol, voor het Jaar* 1729. *Te Leyden by A. Sylvius.* 4°. 1 blad.
Bevat den schijnbaren loop van Jupiter, Mars, Venus, Mercurius en Saturnus. Ook graphisch voor de opeenvolgende maanden.

12)* *Loop, Plaats en Distantie der Planeten, uit den Aardbol voor 't Jaar* 1732. 4°. 1 blad.

Bevat hetzelfde ook voor de maan, en de teekening der *Maan Eclips. 1ste Decemb. 's Avonds by ons* en die van de *Son Eclips voor Europa* 17 *Decem. Voor & na midd.* en *deze Eclips in Holland, Aldus.*

13)* Aurora en Vesper || *Dat is* || Het Lumieren des Daags, den Dage- || raat, of het begin der Morgen Schemering || Den Opgang, en Ondergang der Zonne; || met het eynde der Avond Schemering, || in uuren en minuten, || *Mitsgaders* || Den Azimuth, of streek van Zons Op- || en Ondergang bezuyden en benoorden, || het Oost en het West, in tiende Deelen || van Graaden: op yder Dag van 't Jaar. || *Voor de Rhynlands Sluysen.* || Te Spaarndam en Halfwegen. || Welke Tafelen, insgelyks konnen die- || nen voor de steden || Haarlem en Amsterdam. || En alle andere plaatsen, die omtrent op || dezelve Latitudo werden bevonden. || *Naaukeurig (in 't Jaar* 1735.) *uitgerekent* || Door || Nicolaas Cruquius. || Te Haarlem. || By *P. van Assendelft en de Erve van Kessel.* Boekverk. 8°. (12) blz.

14)* Tegenwoordige || miswysing || der || compassen || rondom den aardbol, || *Tusschen de* 65ste *Graden Noorder-* || *ende Zuyderbreette.* (July 1738). 8°. 12 blz.

Op blz. 12 onderaan staat:

Te Haarlem, gedrukt by *Michiel van Leeuwen.* 1738.

15)* *Afbeeldinge* van *Rhynlands Waterstaat.* Atlas in folio (1740).

De kaart zelve bestaat uit 12 dubbele bladen N°. 1—12; een dubbel blad met den titel; een met de sluis-projecten; een als verzamelblad.

16) *Afbeeldinge van Rhijnlands Waterstaat.* Op 1 vel. 4°.

Is een latere uitgaaf van het verzamelblad van Noot 15.

17) Nauwkeurige Kaart van de Haarlemmer of Leidse Meer. Is. Tirion. 1745. folio.

Is mede een latere, eenigzins veranderde herdruk van dezelfde verzamelkaart.

18) Kaart van de Rivier de Lek, *van Krimpen tot het Hagesteinsche Schoor.* 1764. 7 bladen in folio.

19) Kaart van *De Oude Maas omtrent de* Lint *en* Krabbe. 1770. 1 blad dubbelfolio.

20) Kaart van de Merwede of Nieuwe Maas van den Yssel tot Rotterdam (1772). folio.

21) De vier Ambagts Polder in Rijnland. 1 blad folio.

22) Verbaal van de Inspectie der Dyken langs de Leck. 1744. folio. 5, 3 blz.

23) Hoognoodig onderzoek omtrent de waare oorzaaken van het steeds aangroeyend bederf der Leck. 1749. folio. 4 blz.

24)* In welke hoeveelheid zijn de Nederlandsche Rivieren sedert den aanvang dezer Eeuwe verzand? Wat is het Middel, om de Zanden en Slikken...te verdrijven...en te voorkomen. Haarl. 1753. 8°. (34) blz. 1 krt.
= Verh. Holl. Maatsch. v. Wetensch. Haarlem. I Dl. 1754.

25)* Welke zijn de waare Oorzaaken, dat het Strand bijPetten en de Hondsbosschen sedert eenige Jaaren zo aanmerkelijk is afgenomen? Wat is het beste Middel om het Strand te dier Plaatse te bewaaren en te doen aanwinnen. Haarlem 1755. 8°. (16) blz. 2 krt.
= Verh. Holl. Maatsch. v. Wetensch. Haarlem. II Dl. 1755.

26) Consideratien van M. Bolstra en C. Velsen. 1745. folio.

27) Nadere Consideratien op het Verbaal van de Inspectie der Dijken langs de Lek. 1749. folio. 17 blz.

28) Kortbondig Vertoog van het eminente gevaar in hetwelk zich de Provincie van Hollandt bevindt. 1755. folio. 7 blz.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XX. VOORLOOPER DER ZEEKAARTEN. — DE ZEEKAARTEN VAN WILLEM JANSZ. BLAEU.

1. Zooals men weet is onze LUCAS WAGHENAER de eerste geweest, die zeekaarten uitgaf; waarover men kan raadplegen mijne Bouwstoffen N°. XII, § 7, blz. 233. Maar de steeds ijverige navorscher FRED. MULLER vestigde mijne aandacht op een veel ouder boekje »Caerte van der zee om Oost en West te zeylen [1])" van 1541.

Men zoude zich echter zeer vergissen, wanneer men daarin eene gewone zeekaart verwachtte: vooreerst betreft het hier alleen kustbeschrijving en zoogenaamde »landverkenningen", dat is voorstellingen van de kust, zooals deze zich, van het schip gezien, aan het oog vertoont. Maar daarenboven zijn deze voorstellingen niet geteekend, maar daarentegen slechts in woorden omschreven.

Zoo leest men blad 2 recto:

„Itē vā Heylige lant nader Elue oost zuytoost tot ‖ Schoerhoeck toe/ eñ vā Schoerhoec tot die Butter ‖ ton oost ten zuydē. Buttersant lecht ouer dat Vo‹ ‖ gel sant/ vā dē Butter ton tot dye Moster ton oost ‖ ten suydē/ van die Moster ton tot die bakē oost aen ‖ op seuen of acht vadē/ niet nader aent zuytlant. Eñ ‖ dan oost zuytoost also langhe als die twe toor‹

nen || ouer een comen/ dat is Oldebroec int lant te hale || voor die Medem/ dan oost na Brunsbutel/ dā hout || dat voortlant tot die Stoer.

Itē Wangherooge zult ghi kennē daer staet een || cleyn kerckxen op/ eñ die toren staet aent westeynde.

Itē Spijkerooghe zult ghi kennen eñ het zijn || slechte duynen."

Evenzoo blz. 3 recto:

„Itē als ghi in die Lauwersche wilt zeylen so sult || ghi dat steenhuys op Schiermonijke oge eñ die mo || len ouer een brenghen/ eñ lopen also die Vorne in.

Itē Schiermonike oge te kennē dat is een leghe || duyne/ eñ opt west eynde staet een steē huys/ ende || Schiermonike oge is lanc twe mylen/ eñ tusschen || Schiermonike oghe eñ Amelant leyt een rif/ eñ als ghi dat wester gat wilt in zeylē/ so sult ghi langes || Amelant vaste bi dat landt houden eñ het is diep op || een leech water drie vadem."

Op deze wijze wordt overal de beschrijving van de kust gegeven, en wel achtereenvolgens van:

1 verso. Bouenberghen, Vrieslantszijde, Heylinghe lant.
4 recto. Die Maese, Dat Veerghat, Die Wielinghe wt te zeylen.
5 recto. Die Wielinghe in te zeylen.
5 verso. Zeelandt, Vlaenderszyde, Dat Swyn.
6 recto. Dat Cloeke diep, Die lopinge van dē stroom vā den Seyms langhes die Cust vā Bartangen en Vrancrijck.
7 recto. Dit zijn sommige havenē van Retouwen eñ Britanien.
8 recto. Die Baye.
11 verso. Dat is die gronde eñ diepte van Bertangen.
14 recto. Bertanien, Die coerts vander Kiliaeds.
15 recto. Die streckinge vā die cust van Portingale eñ van Spangien.
15 verso. Massisacho.
18 recto. Dit zyn die getijden van Portingale, Spangen eñ Vranckrijck.
19 recto. Walterslande.
19 verso. Dit zijn die hauenen langhes die custen van Spangen ende van Portingale.

20 recto. Die cape Prior.

24 recto. Dit sijn die ghetijden langes die cust van Yerlant eñ Enghelant.

25 recto. Die lopinghe vander stroomen van Yerlandt ende Enghelandt.

26 recto. Poortlant. Dit sijn die hauenē langes den west cust van Enghelant.

29 verso. Die diepte langhes Enghelant.

31 recto. Die streckinghe ontrent Engelants eynde ende van yerlandt.

32 verso. Hier beghint hoemen in Noorweghen seylen sal.

33 recto. Dit is te zeylen in dat Wester gat.

36 recto. Van den Swine oostwaert.

38 recto. Die coerts na Dantsick. Dit is na Rijghe te zeylen.

38 verso. Van Reuel tot Gotlant.

39 recto. Bi noordē Gotlant om na Reuel. Dit is die Coerts door die Belt.

Men kan zich door deze opgaaf een denkbeeld vormen van de menigte inlichtingen omtrent de vermelde kusten, die zeker het gevolg zijn van herhaalde waarnemingen door tal van zeevarenden op hunne reizen bijeenverzameld. En daardoor is de titel van »Caerte" wel gewettigd, al is dit geheel iets anders dan hetgeen nu onder dien naam wordt verstaan.

Van dit boekje is nog bekend een herdruk van 1588 te Amsterdam bij CORNELIS CLAESZ.

2. Een dergelijke »Kaerte van dye Suyd zee" is bij denzelfden drukker een jaar vroeger 1540 verschenen: het bevat evenzeer beschrijvingen van landverkenningen aan de Zuiderzee, en begint aldus:

„Item die wil zeylen van Amstelredam || ter zeewaert die ghaet van tyoort nae || Urck noort oost.

℄ Item om te weten die mercke van || muydersant/ als Monikedam is om= || trent dat west eynde van scheteldoucks hauen/ oft || als dat huys te muyden staet tusschen weesp eñ die || ferck te muydē so syt ghi te neuen dat sant."

De 14e bladzijde eindigt aldus:

„Item deese Kaerten sal nyemant na || drucken of hi heeft pyrlof van die hee= || ren van Amstelred⁻ of hoor [sic] dienaer ||

dye ghene dye die Tonnen leg= || ghen oft dye die Bakens || setten."

Het schijnt hier eene soort van octrooi te zijn, echter zonder bekrachtiging der overheid.

De 17e bladzijde geeft ons eene figuur, waarvan eerst de onderstaande beschrijving moge volgen.

„Item, die weten wil hoe veel die maen after dye || zon of voor is. So salmē weeten dat die maē in || een etmael wasset oft mindert op dese ronde figuer || alle dage een streke/ eñ. v. strekē maken. iiij. vre/ eñ || xv. streken maken. xii. vren/ so is dye maen vol van || die zon of. Daer bouen ende beneden dese ronde fi= || guer staet."

De figuur zelve bestaat uit een cirkel met de I H S in het midden en twee concentrische ringen daaromheen, die door stralen in 32 sectoren verdeeld zijn. De twee bovenste zijn ledig; de overige links bevatten van boven naar beneden de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 21 (lees 12), 31 (lees 13), 41 (lees 14) en 51 (lees 15); dan weder rechts naar boven de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 31, 41 en 51 (lees 13, 14, 15). De buitenste ring bevat de gedaante van het donkere gedeelte der maan, zooals die zich op de aangewezen punten van haar loopbaan voordoet; beginnende bij volle maan boven, grooter wordende naar de nieuwe maan beneden, en weder afnemende tot volle maan boven. De figuur geeft alzoo eene zeer duidelijke voorstelling van de verschillende phasen der maan op de verschillende tijdperken van haren ouderdom, maar is tamelijk grof geteekend, zooals uit het hier bijgevoegde plaatje, Fig. 1, blijkt.

3. De beide in N°. 1 en 2 beschreven boekjes vond ik in de Akademische bibliotheek te Amsterdam onder het nummer S, 1584 en 1585. Achter het tweede is nog bijgebonden een boekje over scheepsrecht van denzelfden druk en bij denzelfden uitgever, dus wel van denzelfden tijd, hoezeer er geen jaartal op voorkomt. Het draagt den titel „Ordinancie dye die ghemene schipperen stuermannen boetsgesellē eñ coop= luydē mit malcanderen begherende vā schiprechte datmē in Hol= lant/ Zeelāt/ Vlaēdere houdende zijn." [3])

Het bevat een en dertig artikelen omtrent de rechten en verplichtingen van den schipheer of schipper, den coopman of

vrachtman, de schipmans, over de verdeeling der schade, het gebruik van lichtschepen en lootsmannen, den tijd voor de lossing, enz. Het laatste artikel luidt aldus:

„xxxi. Item het si saecke dat die schipper leyt ghelae⁄ || den op gheen side tzees ende hi heeft noot te verco⁄ || pen van des coopmans goede tot des scheeps pro⁄ || flite ende dat schip blijuet verlooren met ongheual || soe sal dye schipheer betaelen den coopman van al || soe veel goets als hi vercoft heeft alst in dye marct || costede daer dye schipheer lade en̄ dan en sal hi geē || vracht of hebben Voors vercoopt dye schipper ee⁄ || nich ghoet van des coopmans goedē aan dese slijde || des zees dat sal den coopman betalen als dye weer || de aen dye marckt gheldet twysschen den minsten || ende den meesten/ ende daer sal die schipper zijn vol⁄ || le vracht of hebben."

Men vindt hier de ruwe beginselen van avary, grosserekening, die ook thans nog niet de volmaaktheid schijnt bereikt te hebben.

4. Deze kaarten waren de voorlooper der eigenlijke zeekaarten, waaronder die van onzen LUCAS JANSZ. WAGHENAER (zie Bouwstoffen N⁰. XII) de eerste waren. Daarna kwamen die van WILLEM JANSZ. BLAEU, voor 1605 ook wel WILLEM JANSZ. VAN ALKMAAR geheeten, ook eenvoudig WILLEM JANSSEN. Deze was in 1571 te Alkmaar geboren, en richtte naderhand in Amsterdam eene boek-, plaat- en kaart-drukkerij op, die groote vermaardheid verkreeg, ook buitenslands; zijne atlassen, zeeatlassen en niet minder zijne hemel- en aardgloben waren spoedig zeer gezocht, en hun roem was van langen duur. Hij overleed aldaär 18 Oktober 1638.

Hij gaf drie werken uit, die op dit onderwerp betrekking hebben.

Licht der Zee-vaert. Amst. 1618—1621. oblong. folio, III Dln.; waarvan ook een herdruk te Amsterdam, 1625 [4]).

See-Spiegel, Inhoudende een korte Onderwijsinghe in de Konst der Zeevaert. Amsterdam 1622, III Dln. folio; waarvan ook een herdruk te Amsterdam, 1652 [5]).

De groote Zee-Spiegel. Amsterdam 1624, II Dln., groot folio; waarvan herdrukken in 1627, 1631, 1652 [6]) in III Deelen.

Niettegenstaande deze vele herdrukken, — of misschien wegens het vele gebruik, dat uit deze vele herdrukken wel zal

blijken, — zijn meer of min volledige exemplaren zeldzaam. Daarom wil ik van deze gelegenheid gebruik maken om volledige exemplaren dezer beide laatste werken, die te Leiden op de Bibliotheek voorhanden zijn, te beschrijven.

Doch eerst een paar woorden over de inleiding van het Derde Deel van 't Licht der Zeevaert: VAN HET GEBRUYCK DEZES BOECKS. Hierin wordt vooral behandeld *de Afvvijckinghe der Naelde ofte de veranderinghe van 't Compas*, de miswijzing van het compas; en de graadboogh met al zijne onderdeelen, en een tafel voor zijne constructie. Overigens komen ook hier, behalve de dertig kaarten, een groot aantal landverkenningen voor. Uit de opdracht aan de „Heeren Staten Generael der vereenighde Nederlanden. Midtsgaders Den Doorluchtigen/ Hoogh. ghebooren Vorst ende Heeren/ Maurits," blijkt dat „de twee voorgaende Deelen innehouden de Beschryvinghe van de Oostersche ende Westersche Zeevaert," die juist het onderwerp van den Seespiegel uitmaken, en dus nu ter sprake zullen komen.

Ter wille van de merkwaardigheid volge hier het KLINCKDICHT van J. V. VONDELEN,

VVas nu de Straet gheveeght van overgheven guyten
Die d'Archipelago benouwen vroegh en spae,
En trecken haer ghewin uyt vromer lieden schae,
En terghen Godt, en 't Recht met steelen en vrybuyten:
De Cypersche handelaer gaf niet twee kop're duyten
Vyt vreeze van 't gevaer: 't verzeeck'ren bleef haest nae;
De koopman sliep gherust, terwijl op Gods ghenae
Hy wisselt een Katthoen, en zy zijn zilv're kluyten:
Want anxt van schipbreuck is van yders hert ghestreecken,
Nu 't LICHT DER ZEEVAERT blaeckt, en helder is ontsteecken
Men vreest' er noch Charybd' noch Scyll', noch plaet, noch blinck,
Natuere, dier jeloers onentvallighlijck ons banden,
Met klippen onder zee, van Turcxze en Griecxze stranden
Moet dulden, dat wy daer gaen landen vry en vranck.

5. Het tweede werk is verdeeld in drie deelen, waarvan de beide laatste ieder zes boeken bevatten.

Het Eerste Deel (1652) bevat „Een korte Onderwijsinghe in de KONST DER ZEEVAERT", 60 blz., met verschillende sterrekundige verklaringen, figuren en tafels.

Het Tweede Deel (1648) houdt in „Eene beschrijvinge der Seekusten Van de Oostersche ende Noordsche SCHIPVAERT."

Daarvan bevat het Eerste Boeck. „De Beschrijvinge der Noordzee/ en kusten van Hollandt/ Vrieslandt/ Holsten en Jutlandt; Van Amsterdam tot Schagen", met de Pas-Caerten N°. 1—9, 20 Landverkenningen, 30 blz.

Het Tweede Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Noorwegen/ Denemarcken/ Holsten en Mekelenborgh. Van der Neus en Schagen tot Bornholm en Statijn in Pomeren", met de Caerten N°. 10—18, 28 Landverkenningen, 36 blz.

Het Derde Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Pomeren/ Pruyssen/ Coerlandt/ Lijflandt en Sweden. Gelegen aan de Oost-Zee", met de Caerten N°. 19—38, 43 Landverkenningen, 40 blz.

Het Vierde Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van de Oostzijde van Enghelandt en Schotlandt", met de Caerten N°. 31—40, 28 Landverkenningen, 26 blz.

Het Viifde Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Noorweghen. Van der Neus tot de Noord-kaap en van 't nieuw gevonden Landt Spitsbergen.", met de Caerten N°. 41—48, 48 Landverkenningen, 24 blz.

Het Seste Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Laplandt en Russen/ en der geheeler Witte Zee. Van de Noordkaap Oostwaert tot Nova Zembla", met de Caerten N°. 49—56, 24 Landverkenningen, 20 blz.

Het Derde Deel (1652) inhoudende „Eene beschrijvinge der Seekusten van de Westersche SCHIPVAERT" is mede in zes Boecken verdeeld. Daarvan bevat:

Het Eerste Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Hollandt/ Zeelandt/ en Vlaenderen. Van Tessel tot de Hoofden", met de Caerten N°. 57—62, 22 Landverkenningen, 28 blz.

Het Tweede Boeck. „De Beschrijvinge der Seekusten van Vranckrijck/ van Cales tot aan Heysant: Ende van Engelandt/ Van Doveren om Engelandts-eyndt, tot de hoek van S. Da-

vid", met de Caerten N°. 63—73, 73 Landverkenningen, 40 blz.

Het Derde Boeck „De Beschrijvinge der Seefusten van Yerlandt", met de Caerten N°. 74—84, 67 Landverkenningen, 44 blz.

Het Vierde Boeck. „De Beschrijvinge der Seefusten van Vranckrijck en Biscaijen Tusschen Heyssant en Caep de Ortegael", met de Caerten N°. 85—93, 74 Landverkenningen, 34 blz.

Het Vijfde Boeck. „De Beschrijvinge der Seefusten van Gallusen/ Portugael en Spanjen/ Van de C. Ortegael tot de Straat van Gibraltar", met de Caerten N°. 94—102, 71 Landverkenningen, 30 blz.

Het Seste Boeck eindelijk. „De Beschrijvinge der Seefusten van Barbarien/ Van de straat van Gibraltar tot de Caep de Geer. Midtsgaders van de Canarische en de Vlaemsche Eylanden", met de Caerten N°. 103—108, 34 Landverkenningen, 18 blz.

De »Landverkenningen" zijn hier niet meer louter beschrijvingen, zooals in de boekjes N°. 1 en 2, maar opgehelderd door schetsen; zie de voorstelling van het eiland Madera, in de figuren 2 en 3, waarbij de onderschriften voorkomen:

bij Fig. 2. „Als Madera zuyden van u. is 12 mijlen/ vertoont het aldus."

Bij Fig. 3. „Als Madera w. z. w. van u. is 10 mijlen/ is 't aldus gedaen."

afgeteekend uit twee verschillende gezichtspunten. Voor de zeevarenden waren deze afbeeldingen zeker van groot gewicht.

6. Lijst der Pas-caerten.

1. Van de Oosterse en Noordse schipvaert van Nederlandt tot Nova-Zembla.
2. *Van de* Noord Zee.
*3. *Van de Zuijder Zee.*
4. *Van de* Vliestroom.
5. Het Vlie en Amelander gat.
6. *De Wester ende Ooster Eemsen met de ander gaten der Zee tusschen Amelandt en Langeroogh.*
7. *Van de* Weser, Elve, *en* Eyder.

8. *Vande Eylanden, Stroomen en droochten aen de Cust van Jutlandt tusschē de Eijder en Rifhorn.*
9. *Afbeeldinghe der Zeecusten van Jutlandt tusschē Schagen en Refhorn.*
10. *Vande Custen van Noorwegen, Denemarcken, Holsten Mekelenborg en Pomeren van Der Neus en Schagen tot voorbij Bordholm.*
11. *De Zeecusten van Noorwegen tusschen Der Neus en Langesondt.*
12. *De Zeecusten van Noorwegen tusschen de Langesondt en Pater noster.*
13. *Van 't Schager Rack tusschen Schagen en Kol.*
14. *Der Schoonse en Zeelandsche Kust tusschen Kol en Valsterbon.*
15. *Van 't Noorder deel van de Belt.*
16. *Van 't Zuijder deel van de Belt.*
17. *De Zeecusten van Holsterlandt, Mekelenborch, en de Eijlanden Laland, Falster en Meren.*
18. *De Zeecusten beoosten Valsterbō, van Bornholm en 't Eylandt Rugen.*
19. *Van de* Oost Zee (1622).
20. *De Zeecusten van Pomeren tusschen het Swin en Rijgshooft.*
21. *De Zeecusten van Pruijssen tusschen Rijgshooft en Der Memel.*

*22. *De Zeecusten van Coerlandt tusschen Der Memel en Derwinda.*

23. *Verthoonende 't Canael tusschen 't suijdeinde van Oesel en Coerlandt en den grooten inham van de Rijgsche Zee.*

*24. *'t Noorder deel vande Rijghse Inham, de Meumondt en 't Eylandt Dageroort.*

25. *De Zeecusten van Lijflandt van Dageroort tot Revel en van Vinlandt daer tegen over.*
26. *Vande Lijflandsche zee, van Revel en Elsenoos tot het uijterste der Oost-zee.*
27. *De Custen van Schoonen en Sweden tusschen Bornholm ofte Sandthamer en Calmer.*
28. *De Zeecusten van Godtlandt met de omleggende Eylandekens.*

29. *De Custen van Sweden, tusschen Calmer en Landsoort 't gat van Stocholm.*
30. *Caarte van 't Stocholmse Liet.*
31. *De Custen van* ENGELANDT, *Nederlandt, Jutlant en Noorwegen, gelegen aende* NOORDZEE.
32. *Verthoonende de mont vande Teemse de Rivier van Londen met alle gronden, diepten en ondiepten daarvoor gelegen.*
33. *De Zeecusten van Engelandt tusschen Aelborgh en Crammer.*
34. *De Noordkusten van Engellandt tusschen Crammer en Flamborger hooft.*
35. *De Noord Cust van Engelandt tusschen Flamborger Hooft en de Rivier van Neiesteel.*
36. *De Custen van Engelandt en Schotlandt tusschen Tinbij en Donde.*
37. *De Custen van Schotlandt van Donde tot d'Eylanden van Orkanesse.*
38. *Eijgentlijcke afbeeldinghe vande Eijlanden Hitlandt, anders Scetlandt, Falo ēn Faijerhil naar hare rechte gelegentheijt ontworpen.*
39. *Van de Eijlanden van Faro ofte Farre, vertoonende na 't leven de wōderlijcke gebroockenheyt ende gestalte der zelver, en watmen in 't bezeijlen van dien aldaer te schouwē heeft.*
40. *Verthoonende in wat ghestalte de Eylanden (Hebriden ghenaemt) achter de noordwesthoek van Schotlandt gheleghen zijn.*

(De drie laatste titels ook in het fransch.)

41. Van de Westcuste van Noorwegen en Spitsbergen.
42. *De Zeecusten van Noorwegen tusschen Der Neus en Schieteness.*
43. *Het Liet van Bergen begrepen in twee stucken.*
44. *Van de Noorweegsche Cust van Olde tot Stemmesheft.*
45. *Het Liet van Dronten.*
46. *De Custen van* Noorweghen *tusschen Dronten en Tromsondt.*
47. *Van 't noordelijckste deel van Noorwegen van Tromsondt om de Noord Caap tot Noordhijn.*
48. JAN MAGEN EYLANDT. — 't Nieuw gevonden lant Spitsbergen.

49. *Van de Cust van Laplandt en Russen tusschen de Noord caap en Nova Zembla.*
50. *De zeecusten van* Noorwegen *vā de Noordhijn tot Wardhuijs. — Het Eylandt Wardhuijs.*
51. *De Custen van Laplandt tusschen Wardhuijs en Kildijn.*
51½. *De Rivier van Kola en het Eylandt Kildijn. — Het Eylandt Kilduijn.*
52. *De Custe van Laplandt tusschen Kilduijn en de seuen Eijlanden.*
53. *De Custen van Laplandt tusschen de 7 Eijlanden en Swetenoes.*
54. *Van de Mont van de Witte Zee. —* Lombarcho.
55. *De Zeecusten van Laplandt tusschen 't Cruijs Eijlandt en Waniga en van Ruslād. tot verbij de Riviere van Archangel. —* De Riviere Dwina *vande mont af tot de Stadt Archangel toe.*
56. *'t Westersche deel vande Witte Zee begrijpende de Zeecusten. van Laplandt van Waniga verbij Ombaij tot Kandelox en de Custe van Corelia daer tegen over.*
57. *Vande Noord-Zee van het Tessel tot de Hoofden.*
58. *De Tesselstroom met de Gaten van 't Marsdiep. — Caerte vande Reede en de Haven van Medemblick.*
59. *De Mase met het Goereesche Gat.*
60. *De Gaten van Brouwershaven, Ziericzee en Der Veere.*
61. *Vande Gaten van Wielinge.*
62. *De Cust van Vlaanderē en Engelandt van Oostende tot deur de Haofden.*
63. *Het Canael tusschen Engelandt en Vrancrijck.*
64. *De Custen van Picardie en Normandie, van Swartenes tot de Seine.*
65. *De Cust van Normandie tusschen Seynhooft en de Kiscassen.*
66. *Van de Zeecusten van Normandie en Bretaigne tusschen de C. de Hagu en Roscou.*
67. *De Cust van Engelandt tusschen de Singels en de drooghten van Weembrugh.*
68. *De Custen van Engelandt tusschen .de drooghtē. van Weembrugh en Poortlandt.*

69. *De Cust van Engelandt tusschē Poortlādt en Goudstart.*
70. *De Custen van Engelandt tusschē Goutstart en Lezard.*
71. *De Engelsche Cust van Lezart af tot de C. de Cornwal en d'Eylanden van de Sortinges.*
72. *De Custen van Engelandt tusschē C. Cōrwal en het Eylandt Londey.*
73. *'T Canael van Bristou met de Zuijd-Cust van Wals-Engelandt.*
74. *Van Yerlandt.*
75. *De zuijdoost hoeck van Yerlandt tusschen Waterfoort en Glascarick.*
76. *De oost Cust van Yerlandt tusschen Glascarick en Dubling.*
77. *De Custen van Yerlandt van Dublingh tot Strangfoort.*
78. *De Kust van Vlster tusschen Strangfoort en Bandthaven met de Custen van Schotlandt daer tegen over.*
79. *De Noord-Cust van Yerlandt tusschen Bandthaven en C. de Telling.*
80. *De West-Cust van Yerlandt tusschen C. Tellin en Slijnehooft.*
81. *West-Cust van Yerlandt tusschen Slijnhooft en de Blasques. — 't Vervolgh vande Rievier van Limrick vant Eijlandt Qowine tot de Stadt.*
82. *De Zuijd-cust hoeck van Yerlandt tusschen de Blasques en Merenhooft.*
83. *De Eylanden en Havenen ontrent de Cabollare bij de zuijdwesthoeck van Ierlandt. — De Cust tusschen Baltimoer en Oldhooft.*
84. *De Zuijdcust van Yerlandt tusschen Oldhooft en Waterfoord.*
85. *Van Vranckrijck Biscaijen en Galissen tusschen Heisant en C. de Finisterre.*
86. *De Zeecusten en Eijlanden aent westeijnde van Bretaignen.*
87. *De Zeecusten van Bretaignen tusschen de Wester-pleimarques en de Rivier van Vannes.*
88. *De Zeecusten van Bretaignen en Poinctou tusschen Boelijn en S. Martens Eijlandt.*
89. *De Kusten van Vranckrijck tusschen Olone en de Rivier van Bourdeaux.*

90. *Van de Rivier van Bourdeaux en de haven van Arcachon.*
91. *De Zeecusten van Vranckrijck en Biscaijen tusschen Arcachon en de C. de Machicaco.*
92. *De Kust van Biscaijen tusschen de C. de Mascichaco en de C. de Pinas.*
93. *Zeecusten van Galissen tusschen C. de Pinas en C. de Ortegal.*
94. *De Custen van Gallissen Portugal en Andalusien van de C. Ortegal tot de Strate van Gibraltar* (met het wapen van Spanje).
95. *De Zeecusten van Gallissen tusschen de Cabē Ortegal en Finisterre.*
96. *De Zeecusten van Gallissen tusschen de Cabo Finisterre en Camino.*
97. *De Zeecusten van Portugal van Viane tot Avero.*
98. *De Custen van Portugael tusschen Avero en Roxent.*
99. *Van de Rivier van Lisbon en de bancken voor St. Vues.*
100. *De Custen van Algavre tusschen de C. S. Vincento en Aimonte.*
101. *De Custe van Andaluzien tusschen Aimonte en de strate van Gibraltar.*
102. *De strate van Gibraltar met de Spaansche Cust van daer tot Malaga.*
103. *Van Barbarische cust mits gaders van de Canarische en Vlaemsche Eijlanden.*
104. *Deze drie stucken vertoonen de Barbarische Cust van de Straat tot de C. Cantin.*
105. *De Custen van Barbarien van C. Cantin tot de C. de Geer.*
106. *De Eijlanden Lancerota, Festeventura en Groot Canarien.*
107. *De Eijlanden Tenerifa Palma Gomera en Ferro.*
108. *d'Eylanden Madera en Porto Santo. — De Reede van Pante del Gada int eijlandt S. Michiels. — De Reede voor de Stadt Angra int eijlandt Tercera.*

Behalve de met een sterretje geteekende kaarten, zijn alle dubbele. De titels zijn op de blanke recto's gedrukt, overigens zijn de keerzijden der kaarten wit. De meeste kaarten

dragen het bijschrift: *Met Privilegie der Ed. H. M. Heeren Staten generael voor thien jaren.* Er zijn er enkele, die het jaartal 1622 dragen. Het zijn alle paskaarten, of »platte caerten" naar de cylindrische projectie van MERCATOR.

7. Keeren wij nog even terug naar het Eerste Deel, dat wel merkwaardig is naar zijn inhoud.

In *Hooftstuck* I—IV wordt gehandeld »van de Sphaera, en haer onderscheyden bewegingen" naar het stelsel van PTOLEMAEUS, »van de rondigheyt en grootheijdt des aerdrijcks," »dat de aerde in 't midden des werelts is;" Hfdst. V—IX: over de verschillende punten en lijnen op de sphera; Hfdst. X en XI: »Van des Sons Declinatie met tafelen voor het schrickel Jaer, en drie volgende jaren;" Hfdst. XII—XV: Over de vaste sterren, met tafels der declinatie, en afbeeldingen met beschrijving der sterrebeelden; Hfdst. XVI—XXII: Over »lenghte, breette en hooghte der Polen;" waar tusschen Hfdst. XIX handelt »Van 't verschil der gemeene platte Zeekaerten met de ronde oft het Aerdrijck", alwaar slechts het volgende gezegd wordt.

„In de gemeyne Zeekaerten werden de Zeekusten en hoecken der Landen ghe‖teeckent nae haere streckingen en distantien van d'een tot d'ander/ oock na hare‖breetten; maer om de onghelijckheydt diese hebben (door hare platte form) met‖met de rondigheydt der aerde/ en is 't niet moghelijck die oock daer beneffens te stellen nae‖hare rechte lenghte. Alle Meridianen oft linien van zuyden en noorden op Aerdrijck/‖hoe verre die op de middellinie van malkander staen/ streckende noordtwaert ofte‖zuydwaert/ komen ten eynden van 90 graden van de linie/ op een punt by een; maer‖op de platte zeekaerten/ 'tzy of zoodanige Meridianen nae oft veer van den anderen‖staen/ zy ghenaken malkander nimmermeer/ maer blijven altijt even verre van een.‖Desgelijks met alle streecken/ uytgenomen alleen die van oost en west."

BLAEU rekende het dus niet noodig om de constructie dezer kaarten meer in bijzonderheden aan te wijzen, maar alleen te verwijzen naar de projectie van MERCATOR.

Hfdst. XXIII—XXIV: »Van 't maken der Graedbogen en Astrolabium" of »Zeerinck" geeft eenige constructiën en een tafeltje over deze werktuigen, waarbij ook de »omgekeerde

Graedboogh ofte dubbele dryhoeck" wordt behandeld, die dienen kan om de Son in de rug te houden. In Hfdst. XXV—XXVII leert men onder verschillende gegevens de Poolshoogte der Sonne en der sterren vinden; Hfdst. XXVIII leert »'t Gebruyck des Noordsters"; Hfdst. XXIX: »Van 't verhoogen der Hemelsche Lichten door de dampen" geeft eene kleine, grove tafel van refractie; Hfdst. XXX leert »Hoe veel mijlen men op yder Compas streeck moet zeylen eermen een graed in breette op Aerdrijck wint." Hfdst. XXXI handelt »Van 't veranderen der Kompassen", de miswijzing, en Hfdst. XXXII »Van de Water-ghetijden" met tafels dienaangaande. Hfdst. XXXIII leert »Om d'ouderdom der Maen te vinden", met »een tien-jarighen Almanach" en Hfdst. XXXIV: »Om d'uyre te vinden des daaghs en des nachts." Tot besluit vindt men een „Tafel van de rechte Ascensie van dertich der voornaemste vaste sterren."

De voorschriften, hier gegeven, op bevattelijke wijze, met ten deele beweegbare figuren en telkens door voorbeelden opgehelderd, zijn geheel ingericht naar de bevatting van gewone zeelieden; daarbij wordt alle eenigzins wetenschappelijke behandeling vermeden.

8. Omtrent het derde in N°. 3 genoemde werk valt weinig meer te zeggen, dan dat het van het vorige alleen onderscheiden is door het grootere formaat, en tevens kleineren omvang, omdat hier de blanke zijden der kaarten alle bedrukt zijn, en er dus van de vier bladzijden eener dubbele kaart, deze blz. 2 en 3 bevat, terwijl op blz. 1 en 4 de tekst zelve voorkomt, en dan ook de paginatuur wordt voortgezet.

Zooals reeds gezegd werd, leveren de meeste exemplaren dezer drie werken de duidelijke sporen, van veel gebruikt te zijn, waarbij de kaarten dikwerf ontbreken, die dus denkelijk voor grooter gemak in het gebruik, eenvoudig waren uitgesneden.

AANTEEKENINGEN.

---

[1]) ¶ Dit is die Caer- || te vander Zee om Oost en West te || zeylen/ en is van die beste Pyloots/ eñ wt || die alð beste Caertē ghecorrigeert/ diemē weet || te vinden/ ende elck cust op tsijn gheset. || ¶. Item ghi schippers/ stuermans/ eñ bootsgesellen || Ick Jan Jacobzoō en houde geen Caerten voor die || mijn dan daer mijn naem eñ merck op staet/ want ic || laet dye mijnen alle iaers eens corrigeren/ wt || die beste Caerten eñ kenders vā die zee. || ¶ Ghedruckt int Jaer 1541. 16°.

Daaronder de dubbele arend van Oostenrijk met het wapen van Amsterdam links, en een monogram (dat van Karel V) rechts.

Dit zeldzame boekje is in klein 4°., bevat blad A—E, 80 bladz. (niet gepagineerd).

Op het einde der 79ste bladz. komt voor:

Gheprent bi mi || Jan Jacobszoon van Amstelredam || in dye vier Heims kinderen || Ende men salse te coop vindē op die oude Brugge.

Daaronder als drukkersmerk de vier Heems kinderen te paard.

Op de 78ste bladz. vindt men nog eens het wapen van Amsterdam, het Groot zegel van Oostenrijk, en een schip met volle zeilen daaronder.

[2]) ¶ Dit is die Kaer- || te van dye Suyð zee tot dat Ran- || serdyep toe/ ende tot dat Maers- || diep toe/ Om met schepen wt of in te || zeylen van Amstelredam te zee/ || waert. Ghedruckt Int Jaer 1540. || (Vignette: hetzelfde schip als achter het vorige boekje.) 16°. 18 bladz. (zonder signatuur of pagineering).

Op de 16de bladzijde leest men:

Gheprent tot Am- || stelrenam (sic): By My Jan Jacobs || zoon Wonende inden Uijsel || In dye vyer Heems || Kinderen.

En daaronder dezelfde dubbele arend als in het vorige boekje.

[3]) ¶ Item dit is die || ordinaneie dye die ghemene schip- || peren stuermannen boetgesellē eñ coop- || luydē mit maleanderen begherende vā schip- || rechte datmē in Hollant/ Zeelāt/ Vlaē- || deren houdende zijn. || (Vignette, als bij het boekje in Noot (3) beschreven). 16°. 14 bladz. (zonder signatuur of pagineering).

Op bladz. 14 leest men verder:

„Gheprent tot Am- || stelredam. By My Jan Jacobs || zoon Wonende in den Uysel || In dye vyer Heems- || Kinderen."

Daaronder het wapen van Amsterdam.

Het jaartal ontbreekt geheel bij dit boekje.

4) De herdruk werd te Amsterdam uitgegeven door Jan Janszoon. in oblong. folio.

Dl. 1. 1626. 119 blz., 19 kaarten.
2. 1625. 131 blz., 41 kaarten.
3. 1627. 56 blz.

Van den eersten druk, uitgekomen bij Willem Jansz. 1618—1621, heb ik voor mij het 3de Deel met den titel:

TDERDE DEEL || VANT || Licht der Zeevaert || INHOVDENDE || De Beschrijvinghe der Zeecusten van || de Middelandtsche Zee. || By een vergaedert en in't licht ghebracht door || WILLEM JANSZOON. || vignette: een zeeslag || Tot Amsterdam, || By Wz Willem Jansz. op 't Water in de vergulde Sonnewyser. Anno 1621. || Met Privilegie voor ses Jaren. Oblong. folio.

In verso van den titel de Privilegie. Dan twee bladz. opdracht aan de Staten Generaal en Prins Maurits, gedateerd „Datum in Amstel- || redam/ den eersten September M.DC en achtthien."

1 blz. voorrede, 1 blz. „KLINCK-DICHT door J. V. VONDELEN."

VAN HET GHEBRVYCK DESES BOECKS. 20 blz. zonder paginatuur.

Dan Capittel I—XXVI, blz. 1—240, kaarten I—XXX. De tekst is in twee kolommen gedrukt.

5) Seespiegel/ || Inhoudende || Een korte Onderwijsinghe in de || KONST DER ZEEVAERT, || En || Eene beschrijvinge der Seekusten || Van de Oostersche/ Noordsche en Westersche || SCHIPVAERT: || Vyt ondervindinghen van veel ervaren Zeevaerders || vergadert || en t'samen ghestelt || *Door* WILLEM JANSZ. BLAEU. || *Nieuwelijcx in verscheyde plaetsen verbetert en vermeerdert.* || Vignette: twee schepen in volle zeilen. || T'AMSTERDAM, By *Jan Blaeu*, op 't Water, in de vergulde Zonnewijser. || In 't Jaer MDCLII. folio.

6) DE GROOTE || Zee-spiegel, || Inhoudende || Een korte Onderwijsinge in de || KONST DER ZEEVAERT, || En || Eene Beschrijvinge der Seekusten van de || OOSTERSCHE, NOORDSCHE en WESTERSCHE || SCHIPVAERT: || Vyt ondervindingen van veel ervaren Zeevaerders vergadert/ en t'samen gestelt || *Door* || WILLEM JANSZ. BLAEU. || *Nieuwelijcx in verscheyde plaetsen verbetert en vermeerdert.* || Vignette: als boven. || T'AMSTERDAM, || By JOAN BLAEU, Op 't Water, in de vergulde Zonnewyser, || in 't jaar MDCLV. folio.

1

2

3

DE TAYBRUG,

DOOR

MICHAËLIS.

De bezwaren en kosten verbonden aan het vervoer over de *Tay* en de *Forth*, over de veeren te Tayport en Burntisland en een onheil, dat in 1849 bij laatstgenoemd veer plaats had, deden, naar het schijnt, reeds toen bij den Heer BOUCH, destijds ingenieur van de Edinburg-, Perth en Dundee-spoorwegmaatschappij, het denkbeeld ontstaan om beide riviermonden te overbruggen, hoewel hij eerst in 1854 aan de bestuurders van den Schotschen North-Eastern-spoorweg dit denkbeeld mededeelde, waar het volstrekt geen bijval ontmoette, omdat men het plan als onuitvoerbaar beschouwde.

De groote vorderingen op het gebied van de wetenschap van den ingenieur gemaakt, blijkende uit de belangrijke uitgevoerde bouwwerken, waren oorzaak dat de twijfel aan de mogelijkheid tot verwezenlijking van het denkbeeld allengs verdween, zoodat in 1864 het voornemen werd te kennen gegeven om eene wet aan te vragen tot vergunning van den bouw van eene brug over de *Tay*.

Het wetsontwerp werd ingediend, doch ontmoette eene ernstige tegenwerking van de zijde van het stedelijk bestuur van Dundee en van het havenbestuur (Harbour-Trustees). Door den invloed van de directie van de North-British-spoorwegmaatschappij, die toen eene brug over de *Forth* wenschte te bouwen, namen de voorstellers hunne aanvraag terug en het was, door verschillende omstandigheden, niet vóór 1870, dat op nieuw een wetsontwerp werd ingediend, dat op 1 Julij het

Huis der Lords bereikte, met de verklaring dat het geene oppositie had ondervonden en 14 dagen later door de Koningin werd bekrachtigd.

Intusschen waren de rigting en het ontwerp van de brug niet weinig gewijzigd.

De plaats, aanvankelijk voor den overgang gekozen, tusschen Newport en Craig-Pier, zou overspannen worden met 63 openingen, met den onderkant van de brug op 100 voet boven hoogwaterpeil, maar om den tegenstand van de Harbour-Trustees te overwinnen, had men reeds in 1865 eene meer westwaarts gelegen rigting, tusschen Woodhaven op den zuidelijken- en Buckingham-Point op den noordelijken oever aangenomen, hoewel de rivier daar veel wijder was, namelijk 8130 voet en met 80 openingen zou worden overbrugd, terwijl de brug eindelijk gebouwd werd $1^1/_4$ mijl (2 K.M.) ten westen van Dundee, waar zij, van oever tot oever, eene totaallengte heeft verkregen van 10320 voet of ongeveer 3145 M.

Volgens het toen aangenomen plan zou de brug, beginnende aan de zuidzijde, bestaan uit de volgende openingen:

3	van	60	voet	of	18.3	M.	ongeveer.
2	»	80	»	»	24.4	»	»
22	»	120	»	»	36.6	»	»
14	»	200	»	»	61.0	»	»
16	»	120	»	»	36.6	»	»
25	»	66	»	»	20.1	»	»
1	»	160	»	»	48.8	»	»
6	»	27	»	»	8.2	»	»

Te zamen 89 spanningen.

De as van de brug volgde over de vijf eerste openingen een boog van 20 chains (ongeveer 402 M.) straal, met de holle zijde westwaarts gekeerd; vervolgens eene regte lijn tot het einde der 16 spanningen van 120 voet en dan weder een boog van 402 M. straal, met de holle zijde naar het oosten, lang ongeveer 600 M., waardoor zij nagenoeg haaks op den noordelijken oever van de rivier, zich in Dundee met den Caledonian-spoorweg vereenigde.

Gedurende de uitvoering werd de grootte der openingen, om verschillende redenen, belangrijk gewijzigd, zoodat na de voltooijing de brug bestond uit:

11	overspanningen	van	245	voet		of	74.5	M. ongeveer.
2	»	»	227	»		»	69.2	» »
1	»	»	166	»		»	50.6	» »
1	»	»	162	»,	10 duim	»	49.6	» »
13	»	»	145	»		»	44.2	» »
10	»	»	129	»,	3 duim	»	39.4	» »
11	»	»	129	»		»	39.3	» »
2	»	»	87	»		»	26.5	» »
24	»	»	67	»,	6 duim	»	20.6	» »
3	»	»	67	»		»	20.4	» »
1	»	»	66	»,	8 duim	»	20.3	» »
6	»	»	28	»,	11 »	»	8.8	» »

Behalve die van 166 voet, die door zoogenaamde bowstring- (boogpees) liggers gedragen werd, bestonden alle overspanningen uit balken met evenwijdige randen.

Toen in 1864 de directie der North-British-spoorwegmaatschappij op het intrekken van het wetsontwerp voor den bouw der brug aandrong, geschiedde dit niet met een vijandig doel tegen de onderneming, maar veeleer om hare eigene aanvraag om concessie voor den bouw eener brug over de Forth niet in gevaar te brengen.

Zoowel vóór als na dit tijdstip gebruikte die directie al haren invloed om de uitvoering te zien tot stand komen, daar haar belang hiermede regtstreeks was verbonden. Door den bouw der beide bruggen toch zou de afstand tusschen Dundee en Londen 12 mijlen (ruim 19 K. M.) korter worden dan langs de North-Western en Caledonian spoorwegen, doch ook door den bouw der Taybrug alleen verkreeg de North-British belangrijke voordeelen, niet slechts omdat zij daardoor bevrijd werd van de kosten van het veer en van den tol, bedragende ongeveer L. S. 13000, die jaarlijks voor het verkeer tusschen Broughty-Pier en Dundee, aan de Caledonian-spoorwegmaatschappij moest betaald worden, maar

ook omdat het vervoer van steenkolen uit Fife naar Dundee zeer zou toenemen, hetgeen mede voor deze stad, als fabriek- en handelstad, van overwegend belang was, daar, vóór dat de brug tot stand kwam, vele schepen de haven zonder lading moesten verlaten en te Newcastle steenkolen gingen innemen, terwijl het vervoer der tot eigen gebruik benoodigde steenkolen en verdere goederen langs de North-British, over de rivier naar Tayport en verder langs den Caledonian naar Dundee, door het herhaalde overladen, zeer kostbaar en bij stormweder onzeker was.

Bij het verkrijgen der concessie werd het kapitaal voor de uitvoering van de brug vastgesteld op L. S. 350000, verdeeld in 14000 aandeelen, elk van L. S. 25, van welk kapitaal de North-British, na voltooijing der brug, $5^1/_4$ procent waarborgde. Later werd nog eene leening gesloten van L. S. 116000, zoodat het geheele kapitaal bedragen heeft L. S. 466000 of ongeveer $5^1/_2$ millioen gulden. Behalve de brug bestond het werk nog uit een spoorwegtak, aanvangende aan het station Leuchars van de hoofdlijn van den North-British spoorweg en dit station verbindende met het zuidelijk uiteinde van de brug, en uit een lijntje met tunnel aan de noordzijde, ter verbinding met Dundee en de havens dier stad *).

Aan de zuidzijde van de rivier is de oever rotsachtig en hoog, zoodat de spoorstaven daar 70 voet (21.3 M.) boven hoogwater liggen, waardoor, daar de bezwaren van het bestuur voor de scheepvaart op de *Tay* tegen de hoogteligging der brug, door eene jaarlijksche uitkeering van L. S. 600, zoozeer waren verminderd, dat goedgevonden werd, dat de vrije ruimte boven den vaarweg tot 80 voet (24.4 M.) werd verminderd, eene flaauwe helling van het landhoofd bij Wormit tot de groote openingen kon aangenomen worden. Aan de noordzijde, waar het terrein laag is en de lijn met het beneden dit terrein gelegen station moest verbonden worden, werd die helling tamelijk steil, namelijk 1 : 74.

---

*) Volgens VON WEBER hebben de kosten der eigenlijke brug L. S. 500000 die van het geheele werk ± L. S. 1000000 bedragen.

Na het verkrijgen der Parlementsacte, waarbij de concessie verleend werd, moest een geschikte aannemer voor den bouw der brug gevonden worden.

Het is zeer goed te begrijpen dat het aantal aannemers, aan wie men de uitvoering van een zoo reusachtig werk kon opdragen en die niet terugdeinsden voor de groote moeijelijkheden en de kansen voor onheilen, die er aan verbonden waren, gering was.

Na eenige onderhandelingen werd echter den achtsten Mei 1871, tusschen de North-British-spoorwegmaatschappij en de firma CHARLES DE BERGUE & C°. van Londen, Cardiff en Manchester overeengekomen, welke firma aannam de brug voor L. S. 217000 in drie jaren te maken. Het werk kostte echter ongeveer L. S. 500000 en de uitvoering duurde zes jaren. Voor een deel is dit verschil zekerlijk toe te schrijven aan de omstandigheid, dat de Heer CHARLES DE BERGUE, kort na het aangaan der overeenkomst, ziek werd en in 1873 overleed en aan de verwikkelingen, die hierdoor ontstonden en eindigden in de overdragt van de overeenkomst aan de firma HOPKINS, GILKES & C°. te Middlesborough, doch voor een grooter deel misschien aan de onvoorziene moeijelijkheden, die men bij de uitvoering ondervond.

Gedurende het onderzoek naar de uitvoerbaarheid van het werk waren opnemingen en boringen gedaan, waaruit was gebleken, dat de oevers uit bazaltrotsen bestaan, die zich aan de zuidzijde tot 50 voet, steil boven hoogwater verheffen, en aan de noordzijde eene flaauwe glooijing hebben, doch onder water, van beide zijden, snel naar het midden der rivier afdalen en, zooals later bleek, dáár eerst aangetroffen worden op diepten, die men niet hopen kon door eene bekende funderingswijze te zullen bereiken. In het bed der rivier waren de rotsen gedeeltelijk bedekt met klei en rolsteenen, gedeeltelijk met zand, onder welk laatste, ter diepte van ongeveer 18 voet (5.50 M.) eene laag grind gevonden werd.

Bij het maken van het ontwerp had men zich gevleid de rots overal te kunnen bereiken of althans, waar die te diep wegzonk, eene laag klei of grind te zullen aantreffen van voldoende vastheid om er gemetselde pijlers op te funderen;

maar nadat de veertiende pijler gefundeerd was, bleek de rots zóó diep beneden water te liggen, dat de wijze van zamenstelling geheel moest gewijzigd worden en men besloot het gemetselde boveneinde der pijlers, ter vermindering van de drukking op den bodem, door gegoten ijzeren kolommen te vervangen.

De 18 voet dikke grindlaag, die over het algemeen werd aangetroffen, scheen vast genoeg om de aldus gevormde pijlers te dragen, doch op vijf plaatsen was de bodem zóó week, dat men 40 voet (12 M.) lange palen in den grond moest drijven, voor welk werk men geoefende heijers uit Holland liet overkomen.

De pijlers en de bovenbouw werden op den oever gemaakt. Hiertoe werd een deel van den zuidelijken oever gevlakt, waterpas gemaakt, en met eene betonlaag gedekt. Op dezen betonvloer werden de pijlers opgetrokken tot zoodanige hoogte, dat zij, op hunne definitieve plaats gebragt, met den top boven laagwater zouden reiken.

De drie eerste pijlers staan op den oever; de zes volgende bestaan elk onder water uit twee kolommen, die ieder afzonderlijk tot de bovenvermelde hoogte op den oever werden zamengesteld. Elke kolom, bestaande uit eene plaatijzeren omkleeding met ringvormige bemetseling in baksteen, werd afzonderlijk naar de plaats van opstelling gevlot en had een gewigt van ± 40 ton. In het midden der kolom bleef eene opening, waardoor de arbeiders en de bouwstoffen op en neder bewogen.

Wanneer eene kolom ter bestemde plaats aangevoerd en op den bodem der rivier gezonken was, werd het water door zaamgeperste lucht daaruit gedreven, en werd de grond binnen de kolom tot op de rots, die men op diepten van 8 tot 15 voet aantrof, uitgegraven, waardoor de schacht naar beneden zonk en vervolgens tot laagwater met beton werd gevuld, waarop het metselwerk kon worden opgetrokken. De plaatijzeren omkleeding was, gedurende de uitvoering, tot boven laagwater opgetrokken, doch werd, zoodra de pijler hoog genoeg was, weder tot dat peil verwijderd.

Het kleine grondvlak der cylinders, ($9^1/_2$ voet = 2.9 M.)

veroorzaakte vele moeijelijkheden bij het zinken. Het gebeurde niet zelden, dat de eene zijde in loopzand kwam, terwijl de andere op een grooten rolsteen stootte; daardoor geraakte de buis uit het lood en had men driemaal het onheil te betreuren, dat zij, bij sterken stroom en stormachtig weder, omtuimelde.

Om aan dit bezwaar het hoofd te bieden besloot men bij de volgende pijlers eene andere wijze van werken te volgen en de beide buizen, die een pijler vormden, op een gemeenschappelijk voetstuk te plaatsen.

Voor de nu volgende pijlers werd op den betonvloer, op den oever, een gesmeed ijzeren ring in elkander gesteld, hoog 3 voet (0.91 M.), lang 22 voet 7 duim (6.9 M.), breed 10 voet 6 duim (3.2 M.), met de lange zijden vlak en met half cirkelvormige einden; hierop werd geplaatst een gegoten ijzeren kegelvormig stuk, hoog 5 voet (1.5 M.), aan de binnenzijde voorzien van een rand, breed 2 voet 6 duim (0.76 M.), waarop het metselwerk, in twee gegoten ijzeren cylinders van 9 voet 6 duim (2.9 M.), werd opgetrokken. Op de 8 voet hooge werkkamer en tot de hoogte van de eerste ijzeren plaat der buizen is een met ijzer bekleede, gemetselde gang gemaakt, dienende om de later te vermelden betonvulling goed tegen den bovenkant van de werkkamer te kunnen aandrijven. Op den uitstekenden rand van de werkkamer werd eene gemetselde bekleeding opgetrokken, reikende, als de pijler ter bestemde plaats was gebragt, tot boven laag water. Tusschen dit metselwerk en de cylinderplaten werd eene tusschenruimte gehouden van 2 duim (5 c.M.) die later met betonmortel werd gevuld.

Om den pijler naar zijne bestemmingsplaats te kunnen vervoeren en daar te kunnen nederlaten, werden aan den plaatijzeren onderrand, aan elke lange zijde, twee ijzeren platen, breed 9, dik 1 duim (229 bij 25 m.M.) geklonken, waaraan, door middel van een $2^1/_4$ duim (57 m.M.) dikke bout, een dwarsstuk draaibaar was verbonden, aan elk einde waarvan, weder om een bout draaibaar, een opgaande stang bevestigd was, tusschen welke stangen, aan het boveneinde, een soortgelijk dwarsstuk aangebragt was. De opgaande

stangen, die 6 duim (0.15 M.) breed en om den anderen 1 en $^1/_2$ duim (254 en 127 m.M.) dik waren en uit stukken, lang 4 voet (1.22 M) bestonden, waren op afstanden van 1 voet (0.3 M.) onderling, doorboord met gaten van $1^3/_4$ duim (44 m.M.).

Bij het vlotten naar de plaats van opstelling hing de geheele pijler, ter diepte van 8 voet (2.4 M.) in het water, aan acht stalen pennen, dik $1^3/_4$ duim, die door de gaten van genoemde stangen gestoken waren en in groeven rustten, die in de voetstukken van vier hydraulische persen gemaakt waren. De persen waren geplaatst op een zamenstel van ijzeren balken, gedragen door twee pontons, waarop het geheele gewigt van den pijler, bedragende ongeveer 145 ton, droeg. De hydraulische pompen hadden eene slaglengte van één voet en het tweede dwarsstuk werd met stalen pennen aan de opgaande stangen, een voet boven den zuigerstang, vastgemaakt, waarna de perszuigers werden geligt, tot de stangen met dit stuk in aanraking kwamen en het zóóver opgetild hadden, dat de pennen uit de hangstangen konden weggenomen worden, waarna, door wegvloeijing van het water uit de persen, de pijler 1 voet kon dalen en dan op nieuw op de, 1· voet hooger geplaatste pennen kon opgevangen worden. Dit spel werd herhaald tot de pijler op den vasten bodem was nedergelaten, waartoe, daar voor de nederdaling van 1 voet ongeveer 5 minuten vereischt werden, een getijde voldoende was.

Wanneer de pijler 4 voet gedaald was, werden de hangstangen, door aanbrenging van verlengstukken van 4 voet lengte, die met bouten aan de reeds voorhanden stangen bevestigd werden, verlengd.

Het zinken geschiedde bij eb. Gedurende het laatste half uur van de eb, wanneer de pijler op den bodem rustte, werd hij zorgvuldig waterpas gesteld en wanneer de eene zijde meer inzonk dan de andere, werd hij door oppomping der persen aan de lage zijde tot den waterpassen stand teruggebragt, tot hij eindelijk behoorlijk horizontaal op den bodem rustte, dan werden de hangstangen boven water losgemaakt en konden de pontons zich verwijderen. Later werden de

stangen door een duiker, onder water van de ijzeren platen aan den onderrand vrij gemaakt, om weder bij de plaatsing van een volgenden pijler dienst te doen.

Zoodra de pijler op zijne plaats stond werd de mantel, met gegoten en getrokken ijzeren platen, tijdelijk verhoogd tot 6 voet (1.8 M.) boven hoog water en werd de gemetselde ring opgetrokken tot zoodanige hoogte, dat er geen gevaar was dat de pijler, door den later ontstaanden luchtdruk, zou opdrijven. Boven op elke buis werd dan eene luchtkamer met luchtsluis geplaatst en in de buizen en de werkkamer werd lucht geperst tot de bodem van de kamer droog lag en arbeiders zich door de opening, die in het hart van elke kolom gespaard was, naar beneden konden begeven om den grond te ontgraven, die door de opening in de buis naar boven werd gehaald en door een, aan weêrzijde met luchtdigte sluiting voorziene hellende buis, — waarvan tot vulling of ontlediging beurtelings de binnenste of de buitenste sluiting geopend werd,— naar buiten kon gebragt worden. Zoodra de pijler de vereischte diepte bereikt had, werd de geheele werkkamer en de opening in de buizen, met beton gevuld, de luchtkamers en de luchtsluizen verwijderd en, nadat het metselwerk tot eene voldoende hoogte opgetrokken was, ook de tijdelijke verhooging van den mantel weggenomen. Hierop werd eindelijk het gemetselde bovengedeelte der pijlers opgetrokken. Iedere pijler werd bij het zinken aan de zuidzijde gesteund door twee, als een verrekijker in elkander schuifbare, door waterdruk uit elkander geschoven beenen en met behulp van zware kettingen aan den voorgaanden pijler opgehangen.

Op den betonvloer, op den oever, werden de balken voor den bovenbouw in elkander gezet. Elke bovenbouw werd berekend op een draagvermogen van $1^1/_4$ ton per voet lengte (4100 K.G. per M.) boven zijn eigen gewigt, met eene maximum-spanning van 4 ton op den vierkanten duim (6.3 K.G. op den m.M^2). De overspanning, die op den oever gereed gemaakt en tijdelijk van een houten vloer op den onderrand voorzien was, werd, zoodra die tot $6^1/_2$ voet (1.9 M.) boven hoog water waren opgetrokken, naar de

pijlers gevlot en daar, bij hoog water, opgeplaatst. Aangezien drie tot vijf spanningen aan elkander gekoppeld waren, moesten die telkens gelijktijdig op de pijlers worden gebragt.

Aan de onderranden van de brugbalken werden, rondom elken pijler, hangsteigers voor de metselaars gemaakt, terwijl de tijdelijke houten vloer diende tot opslagplaats voor de benoodigde materialen.

Nadat de brugbalken door middel van hydraulische dommekrachten twee voet waren geligt, werd het metselwerk daaronder opgetrokken en, zoodra dit verhard was, werden de brugbalken daarop neergelaten en de dommekrachten verwijderd, waarna de geheele pijler, tot den onderkant van de balken, opgemetseld werd. Het metselwerk van baksteen, in gelijke deelen Portlandcement en zand, verkreeg na versteening eene zeer groote mate van hardheid.

Bij den vijftienden pijler bleek het, dat de rots plotseling in de diepte verdween, zoodat deze pijler, die juist op den kant van de rots teregt kwam, zóóver uit het lood hing, dat men hem later moest doen springen en door een anderen vervangen.

Men besloot de tot nu toegepaste funderingswijze op nieuw te verlaten en trachtte een grooter draagvlak bij minder gewigt te verkrijgen. Ook werd van het funderen door zaamgeperste lucht afgezien.

Op den betonvloer, op den oever, werd eene elliptische kuip van plaatijzer gemaakt, lang $23^1/_2$, breed $13^1/_2$, hoog 20 voet (7.2, 4.1 en 6.1 M.) die langs den binnenwand op eene, door eene zwaren ijzeren plaat gevormde en met beton gevulde driehoekige ruimte, ter dikte van 14 duim (36 c.M.) bemetseld werd; boven dit metselwerk werd die kuip nog met eene later te verwijderen ijzeren stuk, eveneens hoog 20 voet (6.1 M.) verhoogd. De geheele aldus gevormde bak, die onder en boven open was en 50 ton woog, werd naar de plaats van opstelling gedreven en daar op den bodem neergelaten, op de boven omschreven wijze. Om de kuip tot op de gevorderde diepte te doen doorzakken, werden op eene daarbij vastgemeerde schuit 4 cylinders geplaatst van 5 voet (1.5 M.) middellijn, van onderen voorzien van

eene naar buiten openslaande deur, waardoor zij haren inhoud in bagger-aken konden lossen, van boven door middel van pijpen en kranen, verbonden met twee slangen van caoutchouc, die aan haar ondereinde door koperdraad versterkt waren.

Terwijl, door duikers, het ondereinde van de caoutchoucslang, naar het midden van de kuip werkende, in het zand werd gestoken, werd een der cylinders luchtledig gemaakt en de gemeenschapskraan geopend zijnde, vulde de cylinder zich met een mengsel van water en zand, dat door opening van de bodemdeur in de aak stortte. Terwijl de eene cylinder gevuld en ontledigd werd, werd een volgende luchtledig gemaakt, zoodat ongeveer $2^1/_2$ minuut tot vulling van elken cylinder, met een mengsel bestaande voor een derde gedeelte uit zand, noodig waren. Naarmate de grond door deze zandpomp verwijderd werd, zonk de kuip dieper in en zoodra men de verlangde diepte bereikt had, werd die, tot ongeveer 1 voet boven den bodem der rivier met beton gevuld en door eene steenstorting omgeven, waarna de tijdelijke kuip werd verwijderd.

Het onderste gedeelte van den pijler, hoog ongeveer 22 voet (6.7 M.) werd op den oever van baksteen in cement gebouwd; het had een langwerpig zeshoekigen vorm, lang 20, breed 10 voet (6 bij 3 M.) en was, ter vermindering van het gewigt, inwendig hol. Op den betonvoet neergelaten, reikte die ring met den bovenkant tot laagwater en de binnenruimte kon dus met beton worden gevuld, terwijl het metselwerk over eene hoogte van nog $14^1/_2$ voet (4.4 M.) werd opgetrokken, waardoor de pijler het peil van hoog water bereikte en met eene totaaldikte van 5 voet (1.5 M.) carmyllie-steen werd afgedekt. Hierop werden zes gegoten ijzeren kolommen, die eveneens een verlengden zeshoek vormden en waarvan de beide uitersten 15 duim (38 c.M.), de vier binnensten 12 duim (30 c.M.) middellijn hadden en die bestonden uit stukken van 10 voet (3 M.) lengte, door ijzeren stangen aan elkander gekoppeld, gesteld.

Voor de groote openingen waarvan men, vermoedelijk om het aantal pijlers te verminderen, de wijdte belangrijk grooter

wenschte te maken dan volgens het oorspronkelijke ontwerp, werd eene soortgelijke funderingswijze gevolgd. Daar echter de brugbalken van deze openingen 190 ton moesten wegen, was het noodig aan het grondvlak meer uitbreiding te geven en kreeg dan ook de cirkelvormige ijzeren kuip en middellijn van 31 voet (9.4 M.). Het onderste deel van 20 voet (6.1 M) hoog, dat in het bed der rivier moest dringen, werd weder ter dikte van 14 duim (36 c.M.) bemetseld en het geheel woog ongeveer 200 ton. De op den beton geplaatste zeshoekige voet verkreeg eene lengte van 27 voet (8.2 M.) bij eene breedte van 16 voet (4.9 M.), werd op gelijke wijze als de overigen afgedekt en op den deksteen werden weder onderling gekoppelde kolommen gesteld, waarvan aan de beide uitersten eene middellijn van 18 duim (46 c.M.), aan de vier anderen eene middellijn van 15 duim (38 c.M.) gegeven werd.

Het opbrengen van den bovenbouw op deze pijlers had volgenderwijze plaats: op iederen pijler werden de onderste pijpstukken der vier binnenste kolommen geplaatst en, nadat deze aan elkander gekoppeld waren, werd hierop, op de zelfde wijze, de tweede rij pijpstukken aangebragt, waarop een stel sterke dwarsdragers werd verbonden, die hydraulische persen droegen, door welke de brugbalken langzaam opgeheven en telkens op pennen opgevangen werden, op de zelfde wijze als gevolgd was om de pijlers naar beneden te laten. Wanneer de kolommen ter geheele hoogte der pijlers gesteld waren, werd nog een tijdelijk stel pijpstukken aangebragt, om de brugbalken tot de hoogte hunner draagvlakken op te ligten en eerst daarna werden de twee buitenste buizen opgerigt en aan de anderen door schoren en dwarskoppelingen verbonden.

Ten noorden van de groote openingen werden de pijlers in diep water, die op een grindbodem rusten, weder op een dubbel stel cylinders gefundeerd. De middellijn dier cylinders is 15 voet (4.6 M.) en het bovendeel der pijlers bestaat uit zes gegoten ijzeren, onderling gekoppelde kolommen, van 15 en 12 duim (38 en 30 c.M.) middellijn.

Voor eenige der pijlers van de openingen van 20 M., in

den noordelijken boog, waar de rivier eene geringe diepte heeft, werd een geheel ander stelsel gevolgd. Ieder dezer pijlers bestaat uit drie gegoten ijzeren buizen, naarmate van de hoogte afwisselend in uitwendige middellijn van 1 voet 4 duim (41 c.M.) tot 1 voet 8 duimen (51 c.M.), met een metaaldikte van 1 duim (25 m.M.), onderling door horizontale diagonaalstangen gekoppeld. Onder elken brugligger, d. i. met den top midden op midden 9 voet (2.7 M.) uit elkander, staat eene buis; die aan de binnenzijde van den boog heeft eene helling van $^1/_8$, die aan de buitenzijde staat te lood, doch is gesteund door eene derde buis, die onder eene helling van $^1/_3$ is geplaatst. Het stellen van deze buizen had op eene zeer eigenaardige wijze plaats. Tegen den onderrand van het onderste pijpstuk werd eene plaat geschroefd, die, evenals die rand 3 voet 10 duim (1.17 M.) middellijn had en voorzien was van 12 opstaande, getande ribben, bij het middelpunt aansluitende aan een pijpje van eenige duimen hoog en naar beneden te niet loopende. Terwijl de buis langs ijzeren leidstangen werd rondgedraaid, werd door het pijpje water geperst, dat den grond losmaakte, die door de getande ribben zooveel noodig verwijderd werd. Elke zesde pijler is dubbel.

Doch ook deze wijze van uitvoering kon niet tot het einde worden voortgezet, daar men op veenlagen en rolsteenen teregt kwam. In dezen bodem werden cylinders van 6 voet (1.8 M.) middellijn met de vroeger vermelde zandpomp gezonken en daarin werden de, met beton omgeven buizen geplaatst.

Beginnende aan den zuidelijken oever bestaan pijler 1 tot 14 uit metselwerk, pijler 15 tot 48 uit metselwerk tot 5 voet (1.52 M.) boven hoogwater en verder uit gegoten ijzeren buizen, pijler 49 tot 77 uit met beton gevulde ijzeren cylinders, waarin gegoten ijzeren buizen geplaatst zijn, die tot 5 voet (1.52 M.) boven hoogwater met metselwerk zijn omgeven; de pijlers 78 en 79 en 80 tot 84 bestaan geheel uit gegoten ijzeren buizen, waarvan die der beide eerstgenoemde pijlers met beton gevuld zijn.

Boven de dertien groote openingen en boven de, met een

bowstringligger overspannen opening van 166 voet, bij den noordelijken oever, is de baan van de brug op den onderrand der hoofdbalken aangebragt, bij de overigen bevinden zich de liggers onder de baan.

De zamenstelling van den bovenbouw, die mij slechts uit enkele, niet zeer volledige schetsen bekend is, geeft geene aanleiding tot bijzondere vermelding; slechts verdient het koppelen der spanningen in groepen van drie tot vijf opgemerkt, doch mijns inziens niet nagevolgd te worden. Is die koppeling stevig genoeg om de balken als een geheel te beschouwen, dan moet de uitzetting en inkrimping boven de smalle pijlers, over eene zoo aanzienlijke lengte en onder een zoo belangrijk gewigt, tot groote zijdelingsche werking op de pijlerkoppen hebben geleid en was die koppeling tot geheele overbrenging der krachten ontoereikend, dan had zij geen nut.

Tot den bouw van de brug zijn gebezigd 3520 ton gegoten ijzer, 6281 ton gesmeed en getrokken ijzer, 2560 M^3. hout, 8600 ton cement, 4350000 gebakken steenen, 780 M^3. gehouwen steen en 271 M^3. breuksteen.

Behalve het reeds vermelde omstorten van sommige pijlers en enkele ongevallen van minder beteekenis hadden, bij de uitvoering van het werk, twee zeer ernstige onheilen plaats; het eerste op 26 Augustus 1873 toen, door het springen der ijzeren omkleeding van een der cylinders van den met luchtdruk gefundeerden pijler N^0. 54, deze vol water liep, waarbij zes man, die bezig waren den grond in den pijler te ontgraven, verdronken; het tweede onheil viel voor in den nacht van 22 Februari 1877. Bij een hevigen storm stortten twee der groote spanningen en een balk van eene aangrenzende spanning, te zamen meer dan 400 ton wegende, naar beneden, terwijl de ijzeren opbouw der pijlers, waarop die balken rustten, geheel werd vernield. Door den hevigen wind was het niet mogelijk geweest de arbeiders, die op de brug waren, te bereiken. Bij het aanbreken van den dag bleek echter dat slechts één hunner vermist was.

De ramp, die op Zondag 28 December 1879 plaats greep, waarbij de pijlers onder de 13 groote openingen bezweken

en een passagierstrein in de *Tay* stortte, met het treurig gevolg, dat alle zich in den trein bevindende personen het leven verloren, is aan verschillende oorzaken toegeschreven geworden.

Het allereerst werd vermoed, dat de trein door den hevigen wind ontspoord was; hiervan zou het gevolg geweest zijn, dat hij met een der brugbalken, die in zijdelingsche rigting zeer weinig weerstand kunnen bieden, in aanraking was gekomen en dit aannemende, ligt het voor de hand te onderstellen, dat de wand zich begaf en de trein daardoor heen naar beneden stortte, terwijl de schok de verdere vernieling zou veroorzaakt hebben.

Eene andere onderstelling is, dat de hevige wind, aan de uitwerking waarvan de brug, met den trein belast, eene grootere oppervlakte aanbood, dan in onbelasten toestand, de pijlers zou hebben doen omstorten.

Men heeft het onheil ook toegeschreven aan ongenoegzaamheid der dwarsverbindingen van de buizen; aan onvoldoende afmetingen van den pijlervoet en eindelijk aan het gebruikmaken van slecht materiaal voor de gegoten ijzeren buizen van de pijlers.

Ik meen de eerste en de laatste der bovengenoemde onderstellingen buiten beschouwing te mogen laten. Het is wel mogelijk dat de trein op de brug derailleerde en zoo dit heeft plaats gehad en hij met eenige hevigheid tegen den brugbalk aankwam, is het zeer waarschijnlijk dat deze doorbrak; doch wanneer de brug overigens sterk genoeg was, laat zich daardoor nog niet verklaren waarom twaalf pijlers omstortten. Bovendien zal wel altijd onbewezen blijven, dat dit gebeurde en zou men eerst tot deze hypothese de toevlugt mogen nemen, wanneer door geene andere, meer voor de hand liggende onderstellingen, rekenschap van het onheil kan gegeven worden.

Uit de enquête en de overblijfselen van de brug zal kunnen bewezen worden, of de gebruikte materialen slecht waren, en indien dit het geval was, ligt hierin ongetwijfeld een der oorzaken van de ramp, doch in de eerste plaats moet die, mijns inziens, gezocht worden in de constructie van de brug.

De hevige storm heeft zonder twijfel tot de vernieling

veel bijgedragen; was echter de zamenstelling overigens onberispelijk geweest, dan zou hierdoor alleen de omstorting niet hebben plaats gehad. Bij den bouw van groote bruggen wordt er toch steeds op gerekend, dat die ook aan stormen moeten kunnen weerstand bieden, en dus moest men daarop bij het ontwerpen van eene brug over een riviermond, zoo nabij de zee, indachtig zijn. Heeft men hierop bij de brug over de *Tay* geen acht geslagen, dan heeft men eene fout begaan, maar bovendien laten zich in de constructie van die brug details aanwijzen, die, zoo zij al niet de verwoesting, na het zoo kort bestaan van het gebouw, moesten tengevolge hebben, toch ongetwijfeld konden doen voorzien, dat die brug, wanneer de uitvoering niet geheel zonder gebreken was, niet lang dienst zou kunnen doen.

Ik zal trachten aan te toonen, dat ofschoon het niet te bevreemden is, dat de rankheid der pijlers tot het vermoeden heeft aanleiding gegeven, dat deze door den hevigen storm zouden zijn omgestort, en hoewel moet worden toegegeven, dat in dit opzigt de brug bij andere soortgelijke constructiën ten achter staat, toch de hevigheid van den wind eene ongekende hoogte zou hebben moeten bereiken om, zonder andere bijkomende omstandigheden, een zoo noodlottig ongeval te kunnen teweegbrengen, zelfs al neemt men aan, dat de snelheid van den luchtstroom, tusschen de hooge oevers van den trechtersgewijze vernaauwenden mond van de *Tay* belangrijk wordt vermeerderd.

De minste breedte heeft de rivier voor Dundee, van waar die zoowel oost- en westwaarts toeneemt, doch bij de plaats waar de brug is gebouwd, haar maximum niet heeft bereikt.

Blijkens mededeelingen van Professor GRANT, van het *Observatorium* te Glasgow, was de snelheid van den luchtstroom, bij den storm van 28 December, 's avonds 7 uur 10 minuten, 72 mijlen in het uur, met windstooten van 90 mijlen in het uur, overeenkomende met eene drukking van 40 ℔ op den vierkanten voet, of 185 K.G. per M^2.

Om duidelijk te doen blijken, dat de storm alleen de vernieling niet heeft teweeg gebragt, maak ik, ter berekening van de stabiliteit van den pijler, de gewaagde en mijns

inziens overdreven onderstelling, dat die drukking, tusschen de oevers van de rivier, versterkt werd tot 250 K.G. per M².

Voor eene naauwkeurige berekening ontbreken de gegevens; voor eene benadering zijn de cijfers, in de voorgaande beschrijving medegedeeld, voldoende.

Bij het volgende onderzoek wordt aangenomen, dat de zes buizen van iederen pijler onderling en met het metselwerk onwrikbaar waren verbonden en met de brugbalken een geheel vormden. Door de kracht van den wind, waarvan de rigting ongeveer evenwijdig aan de as der pijlers wordt ondersteld, wordt dan een buigingsmoment opgewekt, dat in den uitersten vezel van de naar den wind gekeerde buis, nabij haar bevestigingspunt, de grootste trekspanning doet ontstaan.

In eene mededeeling van den Heer GILKES, een der aannemers, in de Transactions van het Instituut van Ingenieurs in Cleveland, van November 1876, worden de oppervlakten, die de pijler en de bovenbouw van elke groote opening aan den wind aanbieden, geschat op 800 vierkante voet of 74 M². Voor den pijler is dit misschien ruim gerekend, voor den bovenbouw is daarentegen de opgegevene oppervlakte veel te klein.

Uit eene schetsteekening van den bovenbouw, zooals die ontworpen was toen de grootste overspanningen nog aangenomen waren op 200 voet lengte, is af te leiden:

Voor de hoogte van den boven- en onderrand van den brugbalk 1 voet; voor die van den langsbalk, waarop de spoorstaaf rust, 14 duim; voor de gemiddelde breedte der diagonalen 10 duim, en stelt men voor den hellingshoek der diagonalen met den brugrand 45° en voor de hoogte van de spoorstaaf 5 duim, dan is, met verwaarloozing van de eindstijlen en van de koppen der dwarsdragers, de oppervlakte door een brugbalk aan de uitwerking van den wind aangeboden:

$$245 \left\{ 1 + 1 + 1^1/_6 + \frac{5}{12} + 2 \times {}^5/_6 \sqrt{2} \right\} = 1455 \text{ vierk. voet} = 135 \text{ M}^2.$$

Hoewel de binnenligger, voor een groot deel door den

buitenligger en den trein voor den wind gedekt is, blijft een gedeelte daarvan en zelfs van het dek, tenzij de rigting van den wind volkomen horizontaal en loodregt op de brug mogt ondersteld worden, aan de uitwerking daarvan blootgesteld en het is zeker geene overdreven ongunstige aanname, wanneer voor het drukkingsvlak van den wind wordt gesteld 160 M².

Voor de oppervlakte van den trein, bestaande uit zeven wagens met locomotief en tender, wordt gesteld 180 M².

De drukking op de deelen der constructie en op den trein wordt dus, met de bovenvermelde aanname voor:

den	pijler . . .	74	× 250	= 18500	K.G.
»	brugbalk .	160	× 250	= 40000	»
»	trein . . .	180	× 250	= 45000	»

Het aangrijpingspunt der krachten kan gerekend worden te liggen boven den gemetselden voet van den pijler voor:

den	pijler op	11.4	M.
»	brugbalk op	27.	»
»	trein op	25.	»

zoodat het omstortingsmoment van den pijler bedraagt:

$$11.4 \times 18500 + 27 \times 40000 + 25 \times 45000 = 2415900 \text{ M.K.G.}$$

De juiste plaats der ijzeren buizen op hun gemetseld voetstuk is mij niet bekend, doch van de waarheid kan niet veel worden afgeweken door aan te nemen, dat de vier binnenste buizen met haar middenpunt 1.5 M., de beide buitenste 3.2 M. uit de hartlijn van den pijler verwijderd waren.

Zoowel voor de buizen van 18, als voor die van 15 duim middellijn wordt de metaaldikte gesteld op $1^1/_4$ duim.

Het moment van enertie van het grondvlak ten opzigte van de pijler-as wordt dan bij benadering:

$$2\{0.0421 \times 3.2^2 + 2 \times 0.0346 \times 1.5^2\} = 1.1736$$

en de spanning van een vezel in het hart van de uiterste buis, gereduceerd op den M².:

$$S = \frac{3.2}{1.1736} \times 2.415900 = 6587300 \text{ K.G. of } 659 \text{ K.G. per c.M}^3.$$

Deze spanning moet echter verminderd worden met de, in tegengestelde rigting werkende drukspanning ontstaande uit het eigengewigt van den pijler en dat van den daarop rustenden last.

Voor het eigen gewigt van het metallieke gedeelte van den pijler kan gesteld worden 40000 K. G. Het gewigt van den bovenbouw eener groote overspanning aannemende op $40 \times 74.5^2 = 222000$ K. G. en dat van den trein, voor zooveel het op den pijler dragen kan op $\frac{119}{149} \times 60 \times 3000 = 144000$ K. G., verkrijgt voor de geheele belasting op den pijlervoet 406000 K. G. en daar de gezamenlijke doorsnede der buizen bedraagt 2226 c.M²., wordt dus de c.M². gedrukt met ± 180 K. G., zoodat de blijvende trekspanning bedraagt 479 K. G. per c.M².

Zooals ik hierboven opmerkte werd slechts om aan te toonen, dat de wind alleen geen oorzaak kan geweest zijn van het omstorten der pijlers, de overdreven onderstelling gemaakt, dat die eene drukking veroorzaakte van 250 K. G. per M². Was daarvoor aangenomen het cijfer van 185 K. G., dat uit de waarnemingen van Professor GRANT is afgeleid, dan zou de spanning, door den winddruk opgewekt, slechts hebben bedragen $\frac{185}{250} \times 659 = 488$ K. G. en dus de blijvende trekspanning $488 - 180 = 308$ K. G. per c.M².

Afgescheiden van andere oorzaken heeft dus de wind, hoewel hij daartoe veel kan hebben bijgedragen, de omstorting niet veroorzaakt. Ofschoon aanzienlijk genoeg voor zulke hooge buizen, ligt toch de berekende spanning ver binnen de grens der trekkende krachten, waaronder gegoten ijzer breekt en die men voor goede kwaliteit op 1100 K. G., voor beste kwaliteit op 1500 K. G. per c.M². stellen kan.

Bij soliede constructies blijft men met de geoorloofde spanning ver binnen die grens en neemt daarvoor in den regel niet meer aan dan $^1/_5$ van het brekingsgewigt, hoewel Dr. HEINZERLING, bij gebruik van materialen onder, voor het meerendeel constante krachten en onder den gewonen invloed van den dampkring, wanneer geene belangrijke trillingen kunnen ontstaan, eene spanning van 400 K. G. voor geoorloofd houdt.

Ofschoon nu aan deze voorwaarden niet voldaan werd en dus, door den wind, in de constructie hooger spanningen konden ontstaan dan men gewoonlijk toelaat, moest de brug daartegen bestand zijn.

Wanneer evenwel de dwarsverbindingen van de pijlers te zwak waren en, zooals maar al te zeer het geval schijnt geweest te zijn, door minder goede uitvoering, de uiterste buis, afgescheiden van de anderen, eene, zij het ook geringe eigen beweging verkrijgen kon, ontstond de mogelijkheid dat in die buis zeer belangrijke trekspanningen werden opgewekt.

Een drietal buizen, op het einde van den gemetselden voet geplaatst, vormde het steunpunt van een der balken van den bovenbouw van de brug. Deze drie buizen waren onderling bij de horizontale voegen, door dubbele gootijzers, die om de aan de buizen gegoten voren grepen, en in elk vak door plat-ijzeren strooken gekoppeld. Op elk drietal lag een hoog koppelstuk met draagplaat waarop de uitzettingsrollen bewogen. De vier binnenbuizen waren eveneens met goot en platijzer, doch niet met het zware koppelstuk vereenigd. De gaten waren ruw en in de voren der buizen gegoten. Ook in de goot en platijzers schijnen die met zeer weinig zorg bewerkt te zijn geweest, zoodat de bouten niet in de gaten pasten, maar eenige speling mogelijk was. De gezamenlijke buizen vormden dus geen onwrikbaar geheel, maar de eene kon zich ten opzigte van de andere meer of minder verplaatsen.

De beide uiterste buizen waren geplaatst in een vlak, haaks op de as van de brug, doch hadden in dit vlak eene kleine helling. Evenzoo bevonden zich de vier binnenste buizen

paarsgewijze, met eene geringe binnenwaartsche helling, in twee vlakken, evenwijdig aan de as van de brug.

Volgens VON WEBER bedroeg het verschil in lengte tusschen grond- en bovenvlak $1^1/_2$ voet, zij 46 c.M. Elke zijwand van de brug was met het hart geplaatst midden tusschen den top van de uiterste en de beide daarbij geplaatste buizen. De buitenbuis droeg dus $^1/_4$ en elke binnenbuis $^1/_8$ van het totaal gewigt van eene brug met de daarop geplaatste belasting en de resultante der drukking werkte ten opzigte van het hart van de buis in het grondvlak aan een hefboomsarm van 23 c.M., die door ombuiging van den top tengevolge van den wind tot 25 c.M. kon toenemen.

Was de dwarsverbinding onwrikbaar geweest, zoodat slechts ieder pijpstuk van 10 voet lengte op zich zelf kon doorbuigen, dan zou uit den hellenden stand van de buis geen gevaar voor den pijler zijn ontstaan, doch de speelruimte behoeft slechts zeer gering te zijn geweest om aan de buis over hare geheele lengte eene doorgaande buiging te laten aannemen, waardoor bij den voet een brekingsmoment kon ontstaan, gelijk aan het product van het op de buis drukkende gewigt met den boven berekenden hefboomsarm van 25 c.M.

Wanneer de trein zich boven een pijler bevond, bedroeg het daarop drukkende gewigt $222000 + \frac{119}{149} \times 180000 = 366000$ K. G. ongeveer, waarvan op iedere uiterste buis $^1/_4$ of ongeveer 91500 K. G. opgenomen werd. Hierdoor kon dus, bij het bevestigingspunt van de buis, een spanningsmoment ontstaan van 2100000 K. G. c.M., waaraan door de inwendige spanningen in het metaal, weêrstand moest geboden worden.

Het moment van inertie van de buis ten opzigte van eene middellijn, bij een uitwendigen straal $r = 23$ c.M. en een inwendigen $r_1 = 20$ c.M. bedraagt $\frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4) = 94123$ en dus de spanning in den uitersten vezel herleid op den c.M^2:

$$S = \frac{23 \times 2100000}{94123} = 511 \text{ K. G.}$$

Ook deze spanning op zich zelf, ofschoon stellig hooger dan mag worden toegelaten, was geen oorzaak van de breuk.

Die buis was evenwel in hare beweging niet vrij, maar werd, afgescheiden van de dwarskoppelingen, door het zware oplegstuk, gesteund tegen de beide binnenbuizen van het drietal, die evenwel weinig tegenstand konden bieden, daar eene eenvoudige berekening toont, dat eene drukking van 100 K. G. aan den top voldoende was om haar 3.5 c.M. te doen doorbuigen.

Van meer beteekenis is de koppeling, die door den bovenbouw van de brug zelf werd verkregen en die, wanneer de oplegging onwrikbaar was, de zes buizen aan den top weder tot een geheel verbond. Dit voordeel ging echter verloren wanneer de balk, onder den winddruk, over het van den wind gekeerde steunpunt kon verschuiven en daar de drukking op het draagvlak 183000 K. G. en de afschuivende kracht van den wind op deze hoogte 70000 K. G. bedroegen, konden alleen de bouten de brug op hare plaats houden, en aannemende dat deze onwrikbaar waren, dan konden nog de bovenbouw over zijne opzetrollen en deze over hun draagvlak verschuiven.

Men kan dus aannemen, dat de uiterste buis, bij elken windstoot, gedurende een oogenblik bijna elken zijdelingschen steun miste; al volgt hieruit nu niet, dat de bovenberekende spanning inderdaad is ontstaan, omdat door het gewigt van de brug, de oplegging en de dwarskoppelingen, eenige, zij het ook een onvoldoende tegenstand werd geboden, — toch blijkt er uit, naar het mij voorkomt, dat de pijler vermoedelijk door trekspanningen is bezweken, daar deze, door de golvende beweging, die de buis onder opvolgende windstooten moest aannemen, waarschijnlijk plaatselijk nog verhoogd werden en het wederstandsvermogen van het ijzer, bij de trillingen door die beweging en door den voortrollenden trein teweeggebragt, vermoedelijk verminderden.

Wanneer de bovenbouw over de drie van den wind gekeerde buizen kon heenglijden en de koppeling tusschen de vier binnenbuizen geen weêrstand bood, dan ontstond in den uitersten vezel van de buitenbuis van het, als een geheel

beschouwd ander drietal, met eene doorbuiging van 16 c.M. eene spanning van ruim 7000 K. G. per c.M².

Ofschoon nu deze toestanden niet in hun geheel en niet allen gelijktijdig kunnen zijn voorgekomen, daar de eerste eene onwrikbare verbinding onderstelt, is het toch stellig geene gewaagde aanname dat zij, voor zoover mogelijk te zamen, spanningen konden opwekken, die afscheuring ten gevolge hadden.

Bij het bovenstaande werd bovendien aangenomen, dat bij het opstellen alle assen der opvolgende pijpstukken van eene buis in eene regte lijn gelegen en dat de buizen zuiver cylindrisch en overal gelijk van dikte waren en werd de stof volkomen homogeen ondersteld. In de praktijk is aan die voorwaarden niet te voldoen en wanneer het juist is wat in de *Engineer* van 9 Januarij jl. wordt gezegd, *dat de randen afgedraaid, de voegen gevlakt, de gaten geboord en om te gemoet te komen aan de ongelijkheden in het gegoten ijzer, ringen soms tot zes in getal onder de moeren werden geplaatst*, dan valt zeker op gelijkmatige dikte evenmin als op eene naauwkeurige uitvoering te rekenen.

Ofschoon ik meen aangetoond te hebben, dat de topbelasting en de wind, bij den voet van de hellende buis noodzakelijk trekspanning moest opwekken, die op de sterkte van het geheel een zeer nadeeligen invloed uitoefende, is het geenszins mijne bedoeling, bij eene goede uitvoering het gebruik van schoorbuizen af te keuren; door aan die buizen, bij voldoende afmetingen en onwrikbare koppeling, eene sterkere helling te geven, zou men de stabiliteit van den pijler vergroot hebben. Eene andere vraag is het, of de schoorbuis tevens behoorde te dienen om den last te dragen; maar hetzij men haar al of niet tot dit doel wenschte te bestemmen, moest men haar afmetingen gegeven hebben, voldoende om aan de grootste krachten, die er in konden worden opgewekt, met volkomen zekerheid weêrstand te bieden.

Hoewel dit uit het bovenstaande wel gebleken is, meen ik er ten slotte nog bepaald op te moeten wijzen, dat mij bij het voorgaande onderzoek slechts onvoldoende gegevens aangaande de Taybrug ten dienste stonden. Er bestaan, voor

zoover mij bekend is, geene beschrijving en teekeningen van het uitgevoerde werk. Wat men er hier en daar in verschillende tijdschriften van vindt, bepaalt zich slechts tot enkele onderdeelen der brug; bovendien komen die berigten in de verschillende bronnen niet altijd overeen.

Nadat ik het bovenstaande had opgeteekend, nam ik kennis van het rapport van den Heer LAW, aan wien door de Heeren ROTHERY, BARLOW en kolonel YOLLAND was opgedragen een onderzoek naar de Taybrug in te stellen.

Aangezien uit dit onderzoek blijkt, dat eenige der bovenmedegedeelde opgaven niet juist zijn en overigens mijne onderstellingen daardoor meer waarschijnlijkheid verkrijgen, meen ik niet beter te kunnen doen dan enkele zinsneden daaruit te vertalen.

In eene voorafgaande beschrijving van de brug zegt de Heer LAW:

»Over het nog bestaande zuidelijk gedeelte van de brug »heeft de spoorbaan eene klimming van 1 op 353.68 en die »klimming liep door over de eerste groote opening; over »de tweede bedroeg zij 1 op 490; over de volgende zes »openingen, de hoogste van de brug, was de baan waterpas, »over de daarop volgende opening was eene daling van 1 op 130 »en over de vier volgende van 1 op 73.56, welke daling over »bijna het geheele noordelijke einde van de brug bestond.

»Het gevallen deel van de brug bestond uit gesmeed ijzeren »traliebalken hoog 27 voet, met een afstand hart op hart »van 14 voet 10 duim. De bouw en onderrand hadden den »trogvorm, 2 voet wijd en 15 tot 16 duim hoog. De balk »van iedere overspanning was op zich zelf een geheel; de »eindvertikalen hebben dezelfde doorsnede als de randen; »slechts waren zij buitenwaarts 18 duim breed; de diagonalen »die alleen trekkende krachten moesten opnemen, bestonden »uit platte staven, paarsgewijze aan iedere zijde van de ran»den geplaatst; de gedrukte diagonalen hadden den I vorm »en waren tusschen de opgaande platen van de randen ge»plaatst en met deze en met de getrokken staven, bij hunne »ontmoeting, verbonden.

»De bovenranden waren door gesmeed ijzeren dwarsbalken »en diagonalen gekoppeld. De baan werd gedragen door »gesmeed ijzeren vischbuikvormige dwarsdragers, die 5 voet »5 duim uit elkander waren geplaatst, op den bovenkant »van den onderrand droegen en daaraan waren geklonken, »om te dienen als stijlen der dwarskoppeling, die door dia»gonaalstaven voltooid werd.

»Te oordeelen naar het overgeblevene deel van de brug is »de baan met zorg zamengesteld. De spoorstaven liggen op »houten langsliggers breed 18, hoog 15 duim; de rails zijn »van staal en wegen 75 pond per yard, met contrarails van »gelijk gewigt en materiaal, die met de spoorstaven in de»zelfde, 3 voet uit elkander geplaatste stoelen rusten. Om »de spoorwijdte te behouden zijn, op afstanden van onge»veer 19 voet, platijzeren koppelstangen aangebragt.

»De brug is bevloerd met planken, 4 duim dik, gedekt »met asphalt en met eene weinige duimen dikke grindlaag, »als waarborg tegen brandgevaar.

»De omgestorte pijlers bestonden uit zes gegoten ijzeren »kolommen, gekoppeld door gesmeed ijzeren dwars- en kruis»staven. De funderingmuur was een zeshoekige betonpijler, »met metselwerk omkleed, lang van punt tot punt 27 voet »6 duim, breed 15 voet 6 duim. Deze pijlers waren opge»trokken tot 5 voet boven hoog water bij springvloeden. »De vier bovenste lagen waren van gehouwen steen en er »blijkt geene beweging of verzakking te hebben plaats »gehad.

»De hoogte van de bovenste laag van het metselwerk tot »den onderkant der liggers wisselt af tusschen 83 voet en »81 voet 3 duim."

In eene tabel worden de volgende opgaven medegedeeld:

Nommers der pijlers.	Hoogte van den pijler.	Nommers der overspanningen.	Wijdte der overspanning.	Omschrijving van de oplegging op den pijler.
	vt. dm.		vt.	
28	67. 6	29	245	3 rollen op den lagen balk.
29	82. 6	30	245	8 » » » pijler.
30	83. 0	31	245	8 » » » »
31	83. 0	32	245	vastgebout op den pijler.
32	83. 0	33	245	8 rollen op den pijler.
33	83. 0	34	227	6 » en uitzettingstoestel.
34	83. 0	35	245	8 » op den pijler.
35	83. 0	36	245	vastgebout op den pijler.
36	83. 0	37	227	8 rollen op den pijler.
37	82. 8	38	245	6 » en uitzettingstoestel.
38	82. 4	39	245	8 » op den pijler.
39	82. 0	40	245	vastgebout op den pijler.
40	81. 8	41	245	8 rollen op den pijler.
41	66. 10	—	—	3 » op den lagen balk.

NB. De pijlers zijn gerekend uit het zuideinde.

»De zes kolommen waren zoo geplaatst, dat zij twee drie-»hoekige groepen vormden, die aan hun boveneinde alleen »door- dwars en diagonaalstangen verbonden waren. De beide »uiterste kolommen hadden 18 duim middellijn en helden in »de rigting naar de brug met den top 12 duim over. De »middellijn der vier andere kolommen was 15 duim; zij ston-»den paarsgewijze in vertikale vlakken evenwijdig aan de as »der brug en helden in dit vlak over hunne geheele hoogte, »12 duim naar binnen over.

»Iedere kolom bestond uit zes pijpstukken met randen, op »de voeg met 8 schroefbouten van $1^1/_8$ duim aan elkander

»verbonden. Ieder drietal was gedekt door een gesmeed »ijzeren doosligger met ⊥ grondplan en gedragen door de »drie kolommen; op dezen doosligger was een andere cel»vormige ligger geplaatst, in de rigting van de as van de »brug en vertikaal onder den hoofdbalk. Boven op dezen »celvormigen ligger was eene zware gegoten ijzeren plaat »vastgebout, terwijl eene soortgelijke plaat onder aan den »brugrand bevestigd was en tusschen deze beide platen waren »de gegoten ijzeren rollen, zwaar in middellijn 5 duim, lang »2 voet geplaatst, waarop de brug droeg.

»Bij de pijlers 31, 35 en 39 ontbraken de rollen en waren »de tralieliggers met schroefbouten aan de celvormige lig»gers bevestigd.

»In de rigting haaks op de brug lagen de assen van de »brugbalken midden tusschen de uiterste en de beide bin»nenste kolommen van elke groep, zoodat de eerste de helft »en elk der beide anderen een vierde van de drukking »opnamen.

»De drie kolommen van elke groep waren door koppel»en trekstangen verbonden. De horizontaal geplaatste kop»pelstangen bestonden uit twee gootijzers, met de ruggen »naar elkander gekeerd, aan elk einde met twee bouten van »$1^1/_8$ duim verbonden aan ooren aan de kolom gegoten. »In elke regthoekige opening door de kolommen en twee »koppelstangen gevormd, waren diagonaalsgewijze getrokken »ijzeren platen, breed $4^1/_2$, dik $^1/_2$ duim, aangebragt met hun »boveneinde door bouten, dik $1^1/_8$ duim, verbonden aan »ooren, die aan de kolom waren gegoten en met hun onder»einde met spieën bevestigd tusschen twee platen van $4^1/_2$ »bij $^3/_8$ duim, die weder door $1^1/_8$ duim dikke bouten ver»bonden waren aan ooren, aan de kolommen gegoten.

»In de rigting haaks op de brug waren de kolommen van »15 duim op dezelfde wijze door horizontaal- en diagonaal»stangen verbonden, terwijl bovendien, bij iedere voeg, de »15 duims kolommen van dezelfde groep door eene getrok»ken ijzeren trekstang van $1^1/_2$ duim middellijn vereenigd »waren."

Na eene uitweiding over de wijze van berekening der

drukkingen op de pijlers, die mij niet voorkomt juist te zijn, gaat de Heer LAW aldus voort:

»Maar ongelukkiglijk moet het, tengevolge van de onvol-
»doende wijze waarop de steun- en trekijzers, die de kolommen
»vereenigden, waren aangebragt, er ver van af geweest zijn
»dat de pijlers als stijve constructies konden worden aange-
»merkt. De steunijzers waren gootijzers, met de ruggen naar
»elkander geplaatst en de ooren der kolommen daartusschen,
»waarmede zij, aan ieder einde, met twee bouten van $1^1/_8$
»duim verbonden waren; de boutgaten waren op $1^1/_4$ duim
»middellijn gegoten en daar zij ruw en grooter dan de bout-
»dikte waren en de einden der steunijzers geen vlak vonden
»waartegen zij aanstieten, werden deze ijzers alleen op hunne
»plaats gehouden door de zamenknijping der bouten. Maar
»de aldus verkregen zekerheid moet zeer gering geweest zijn,
»omdat, door de ongelijkheid der ooren zelf en door dat
»sommige gaten in de ooren, op eene ruwe wijze, door een
»stomp werktuig verruimd waren, waardoor een baard was
»achtergebleven, het werkelijke draagvlak van onderscheidene
»koppelstangen tegen de ooren zeer klein was.

»Bij de uitvoering van het werk werden de vlakke trek-
»stangen met spieën opgesloten, maar daar de insnijdingen in
»de staven, waar de spieën tegen steunden, ruw waren;
»de wiggen zelf ruw gesmeed waren en de gaten in de
»ooren niet cylindrisch, en schroefbouten in plaats van
»pennen gebruikt waren, om de einden der diagonalen te
»bevestigen, was het werkelijke steunvlak zeer gering en
»eene betrekkelijk geringe kracht noodig om den kant van
»het gat in den draad van de schroef te dringen.

»Evenzoo moet opgemerkt worden, dat het steunvlak van
»de spie, tegen de staaf, geheel onevenredig was aan de door-
»snede van deze, want terwijl de doorsnede van de, aan eene
»trekkende kracht onderworpen staaf eene oppervlakte had
»van 1.625 vierkante duim, was de oppervlakte van de, aan
»drukking onderworpen spie, die 1.86 vierkante duim had
»behooren te zijn, slechts 0.375 vierkante duim, dus de
»sterkte slechts één-vijfde van die der staaf.

»Het gevolg daarvan kon wezen, dat door een zijdeling-

»schen druk tegen de kolommen, beweging moest ontstaan »in de koppel- en trekstangen, waardoor de laatste slap wer»den. En die beweging had inderdaad plaats. Ik bevond, dat »in de nog bestaande trekstangen, ijzeren stopstukken van »$^1/_4$ duim dik, tusschen de spie en de groef waren aange»bragt en ik vernam, dat dit van tijd tot tijd, sedert de »opening van de brug voor het verkeer, had plaats gehad.

»Uit de mededeelingen, die ik ontving, bleek dat ongeveer »150 zulke stopstukken waren aangebragt tusschen October »1878 en het tijdstip waarop de brug instortte, en dat de »noodzakelijkheid daaraan reeds ontstond toen de brug vijf »maanden in gebruik was. Deze omstandigheid toont aan, »dat onder de gezamenlijke inwerking van overtrekkende trei»nen en van den wind eene belangrijke, stootende beweging »in de pijlers heeft moeten ontstaan en wijst, naar het mij »voorkomt, op de eerste oorzaak van het onheil; want door »het slap worden van de dwars- en diagonaal-stangen werd »de eenige voorwaarde weggenomen, waarop de magt van »het bouwwerk, om weêrstand te bieden tegen omstorting »door eene zijdelingsche kracht, berustte. En het is gemak»kelijk te begrijpen, dat een storm, zoo hevig als die van »28 December jl. in de verbindingen der dwars- en kruis»stangen met de kolommen, bewegingen kon doen ontstaan, »waardoor deze niet meer in staat waren aan het bijkomende »gewigt van den trein en de zijdelingsche drukking van den »wind weêrstand te bieden."

Junij 1880.

OVER

PERIODIEKE TERUGLOOPENDE BETREKKINGEN

TUSSCHEN DE

COËFFICIËNTEN IN DE ONTWIKKELING VAN FUNCTIËN;

MEER IN HET BIJZONDER TUSSCHEN DE BERNOULLIAANSCHE EN OOK TUSSCHEN EENIGE DAARMEDE VERWANTE COËFFICIËNTEN.

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

Indien, stellende $i = \sqrt{-1}$ en $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = cos\frac{2\pi}{n} + i\,sin\frac{2\pi}{n}$, de n wortels van de vergelijking $\omega^n - 1 = 0$ worden voorgesteld door ω^k, waarin aan den exponent k achtervolgens alle geheele waarden van 0 tot en met $n-1$ zijn te geven, en onder welke wortels dus steeds $\omega^0 = 1$ voorkomt, terwijl wél steeds $\omega^{\frac{n}{2}} = e^{\pi i} = cos\,\pi + i\,sin\,\pi = -1$ is, maar deze waarde slechts voor het geval van n even, dat is voor een geheelen exponent $\frac{n}{2}$, tot de wortels behoort, en terwijl alle overige wortels steeds complex zijn, dan heeft voor eene willekeurige bestaanbare functie $F(x)$, die bij vervanging van x

door $\omega^k x$ en bij ontwikkeling volgens de magten van ω^k, daarbij lettende op $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$, overgaat in

$$F(\omega^k x) = X_0 + \omega^k X_1 + \omega^{2k} X_2 + \text{enz.} + \omega^{(n-1)k} X_{n-1},$$

(waarin X_l naar omstandigheden eindige of oneindig voortloopende polynomia van x kunnen zijn), de zoogenaamde norm van deze functie, dat is het door de notatie $\prod_0^{n-1}{}^k F(\omega^k x)$ voor te stellen product $F(x)\ F(\omega x)\ F(\omega^2 x) \ldots F(\omega^{n-1} x)$, eene bestaanbare waarde die onder den vorm van den dubbelorthosymmetrischen determinant van den n^{den} graad

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \ldots X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 \ldots X_{n-2} \\ X_{n-2} & X_{n-1} & X_0 \ldots X_{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1 & X_2 & X_3 \ldots X_0 \end{vmatrix}$$

te schrijven is. Dit kan o. a. blijken doordien deze determinant, als men de kolommen achtervolgens vermenigvuldigt met, maar tevens de rijen achtervolgens deelt door 1, ω^k, ω^{2k}, enz., $\omega^{(n-1)k}$, (daarbij waar noodig weder lettende op $1 = \omega^{nk}$), bijgevolg wél zijne waarde onveranderd behoudt, maar toch den gewijzigden vorm aanneemt ontstaande door iedere X_l te vervangen door $\omega^{lk} X_l$, dat is door x te vervangen door $\omega^k x$, zoodat vooreerst de determinant, deze laatste vervanging toelatende, eene functie niet slechts van x, maar bepaaldelijk van x^n, moet wezen, terwijl ten andere meer in het bijzonder, de som der elementen van iedere rij in den gewijzigden vorm gelijk $F(\omega^k x)$ zijnde, de determinant zelf door deze $F(\omega^k x)$, dus ook door het product of de norm $\prod_0^{n-1}{}^k F(\omega^k x)$, deelbaar moet wezen, en dan wegens de gelijkheid der aanvangstermen X_0^n in de ontwikkeling van deter-

minant en van product, niet anders dan deze norm zelf kan zijn. (Zie o. a. ook Dr. R. BALTZER, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 3e Aufl., 1870, pag. 98—104; Dr. s. GÜNTHER, *Lehrbuch der Determinanten-Theorie*, 1875, pag. 93—95).

In plaats evenwel van nu te trachten voor eene gegeven $F(x)$ deze norm hetzij door den vorenstaanden determinantenvorm hetzij op andere wijze volgens de magten van x^n te ontwikkelen, is het voor het hier volgende onderzoek doelmatiger uit te gaan van de ontwikkeling van het product der norm met de logarithmisch afgeleide $\frac{F'(x)}{F(x)}$ van $F(x)$, welk product dus wél bestaanbaar, maar eene functie niet uitsluitend van x^n, maar van x zelf, is. Stellende bijv. dat men in het geval verkeert dat dit product eene ontwikkeling volgens de geheele positieve opklimmende magten van x toelaat, welke ontwikkeling men dan, wat de coëfficiënten betreft met het oog op de verdere berekening, altijd onder den vorm

$$\frac{F'(x)}{F(x)} \cdot \prod_{0}^{n-1}{}^{k} F(\omega^k x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \text{enz.} +$$
$$+ n a_n x^{n-1} + \text{enz.} + (qn + p) a_{qn+p} x^{qn+p-1} + \text{enz.} \ldots (1)$$

kan schrijven, (zijnde hierin $q = 0, 1, 2,$ enz. tot oneindig, maar, voor eene bepaalde waarde van n, p slechts $= 1, 2, 3,$ enz. tot n te nemen), dan volgt hieruit gemakkelijk de ontwikkeling der norm zelve. Immers, het eerste lid van (1), dat is het product $F'(x) \cdot \prod_{1}^{n-1}{}^{k} F(\omega^k x)$, is niet anders dan de eerste term der naar x afgeleide functie van de norm, en uit dezen term zijn de overige $n-1$ termen dier afgeleide achtervolgens af te schrijven door, voor $k = 1, 2,$ enz., $n-1$, slechts x te vervangen door $\omega^k x$ (waardoor de norm zelve onveranderd blijft) en de uitkomst telkens met ω^k te vermenigvuldigen; zoodat men, de som van al deze n termen nemende, verkrijgt:

$$\sum_0^{n-1}{}_k \frac{\omega^k F'(\omega^k x)}{F(\omega^k x)} \cdot \prod_0^{n-1}{}_k F(\omega^k x) = \sum_0^{n-1}{}_k . \omega^k \{a_1 + 2a_2\omega^k x + 3a_3\omega^{2k}x^2 + \text{enz.} + na_n\omega^{(n-1)k}x^{n-1} + \text{enz.} + (qn+p)a_{qn+p}\omega^{(qn+p-1)k}x^{qn+p-1} + \text{enz.}\}.$$

Het blijkt alzoo dat in deze som de algemeene term in x^{qn+p-1} gevonden wordt uit den gelijknamigen term in (1) door vermenigvuldiging met den factor $\sum_0^{n-1}{}_k \{\omega^k . \omega^{(qn+p-1)k}\} = \sum_0^{n-1}{}_k \omega^{kp} = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p}$, dat is steeds met nul, behalve alleen voor $p = n$ zelf, als wanneer deze factor gelijk $\sum_0^{n-1}{}_k 1^k = n$ is; en de vorenstaande som herleidt zich dus tot

$$\frac{d. \prod_0^{n-1}{}_k F(\omega^k x)}{dx} = n\{n\,a_n\,x^{n-1} + 2\,n\,a_{2n}\,x^{2n-1} + 3\,n\,a_{3n}\,x^{3n-1} + \text{enz.} + q\,n\,a_{qn}\,x^{qn-1} + \text{enz.}\},$$

waaruit door integratie voor de norm zelve gevonden wordt:

$$\prod_0^{n-1}{}_k F(\omega^k x) = n\{a_0 + a_n\,x^n + a_{2n}\,x^{2n} + a_{3n}\,x^{3n} + \text{enz.} + a_{(q-1)n}\,x^{(q-1)n} + a_{qn}\,x^{qn} + \text{enz.}\}, \ldots\ldots\ldots (2)$$

indien namelijk na_0 de waarde voorstelt die zij voor $x = 0$ aanneemt.

De ontwikkeling (1) en dus ook (2) bekend zijnde, doet haar quotient de ontwikkeling van $\frac{F'(x)}{F(x)}$ kennen; of ook, deze laatste ontwikkeling schrijvende onder den vorm:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = s_1 + s_2 x + s_3 x^2 + \text{enz.} + s_p x^{p-1} + \text{enz.} +$$

$$+ s_{n+p} x^{n+p-1} + \text{enz.} + s_{qn+p} x^{qn+p-1} + \text{enz.}, \ldots \quad (3)$$

geeft de gelijkstelling der coëfficiënten van x^{qn+p-1} in het product der tweede leden van (2) en (3) en in het negatief genomen tweede lid van (1) de navolgende betrekking tusschen de coëfficiënten a (of liever de verhoudingen van deze) en s, namelijk:

$$a_{qn} s_p + a_{(q-1)n} s_{n+p} + a_{(q-2)n} s_{2n+p} + \text{enz.} + a_{2n} s_{(q-2)n+p} +$$

$$+ a_n s_{(q-1)n+p} + a_0 s_{qn+p} = -\frac{qn+p}{n} a_{qn+p}, \ldots \ldots \quad (4)$$

die dus, wanneer men daarin voor eene bepaalde waarde van n en voor eene bepaalde aan $1 \leqq p \leqq n$ voldoende waarde van p achtervolgens $q = 0, 1, 2,$ enz. tot oneindig neemt, een stelsel van periodieke terugloopende of recurrente betrekkingen tusschen de coëfficiënten s_p, s_{n+p}, s_{2n+p}, enz. van eene met overspringing telkens van $n - 1$ tusschentermen gevormde groep van termen in (3) oplevert, en bijgevolg, op deze wijze toegepast op de verschillende voor p in aanmerking komende waarden 1, 2, 3, enz., n, alle dergelijke stelsels van betrekkingen voor al dergelijke groepen doet kennen.

En bovendien geeft nu het genoemde voor bepaalde n en p en voor $q = 0, 1, 2,$ enz. tot en met eene willekeurige q opgemaakte stelsel van $q + 1$ lineaire vergelijkingen (4) de gelegenheid om de $q + 1$ coëfficiënten s_p, s_{n+p}, s_{2n+p}, enz., s_{qn+p} als onbekenden op te lossen in functie van de coëfficiënten a, waardoor men in het algemeen voor s_{qn+p} eene breuk verkrijgt, hebbende tot noemer den determinant die gevormd wordt uit alle in de eerste leden der vergelijkingen

voorkomende coëfficiënten a en die dus, uithoofde daarin alle elementen aan ééne zijde der diagonaalrij ontbreken, zich herleidt tot zijn aanvangsterm a_0^{q+1}, terwijl de teller der breuk uit den noemer wordt afgeschreven door de laatste kolom te vervangen door de tweede leden der vergelijkingen, zoodat men, deze laatste kolom voorop brengende en tevens teller en noemer vermenigvuldigende met $(-)^{q+1}n$, verkrijgt den navolgenden $(q+1)^{en}$ graads-determinant ter zelfstandige of onafhankelijke of independente berekening van s_{qn+p}, namelijk:

$$(-)^{q+1}.n.s_{qn+p} = \begin{vmatrix} p\,a_p & a_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ (n+p)a_{n+p} & a_n & a_0 & 0 & & 0 & 0 \\ (2n+p)a_{2n+p} & a_{2n} & a_n & a_0 & & 0 & 0 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & & & & & \\ ((q-2)n+p)a_{(q-2)n+p} & a_{(q-2)n} & a_{(q-3)n} & a_{(q-4)n} & & a_0 & 0 \\ ((q-1)n+p)a_{(q-1)n+p} & a_{(q-1)n} & a_{(q-2)n} & a_{(q-3)n} & & a_n & a_0 \\ (qn+p)a_{qn+p} & a_{qn} & a_{(q-1)n} & a_{(q-2)n} & & a_{2n} & a_n \end{vmatrix} \quad \ldots(5)$$

Behalve de reeds boven gemaakte opmerking dat deze s_{qn+p} niet zoozeer van de coëfficiënten a zelve, maar alleen van hunne onderlinge verhoudingen afhangt, kan nog in sommige gevallen voor de werkelijke berekening de opmerking van dienst zijn dat men zoowel in (4) als in (5) alle coëfficiënten a in volgorde met de termen eener willekeurige meetkundige reeks mag vermenigvuldigen of mag deelen, dat is in het algemeen a_{qn+p} vervangen bijv. door $\lambda^{qn+p}a_{qn+p}$, mits dan slechts gelijktijdig iedere s_{qn+p} evenzeer vervangende door $\lambda^{qn+p}s_{qn+p}$. Dit blijkt namelijk, hetzij door neder te schrijven dat het product van (2) met x-maal (3) gelijk is aan $(-x)$-maal (1) en dan hierin de oorspronkelijke veranderlijke x te vervangen door λx, hetzij regtstreeks wat (4) betreft doordien deze betrekking de omschreven vervanging van alle a en s werkelijk toelaat, hetzij eindelijk voor zoover (5) aangaat door de opvolgende rijen van den determinant te vermenigvuldigen met λ^p, λ^{n+p}, λ^{2n+p}, enz., λ^{qn+p} en tevens de opvolgende

kolommen te deelen door 1, λ^p, λ^{n+p}, enz., $\lambda^{(q-1)n+p}$, hetgeen nederkomt op de vermenigvuldiging van den determinant zelf met λ^{qn+p}.

Ten aanzien van de beteekenis zoowel van de coëfficiënten s als althans van de in (2) en in het eerste lid van (4) voorkomende en dus bij $p = n$ behoorende coëfficiënten a kan nog het volgende worden vermeld. Stel dat men bij ontbinding van $F(x)$ in haar eindig of oneindig aantal lineaire factoren heeft:

$$F(x)=A(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)(1-\alpha_3 x)(\text{enz.})=A.\prod(1-\alpha x),..(6)$$

dan wordt hieruit door logarithmische differentiatie en door invoering der notatie $s_p = \sum \alpha^p$, de formule:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)}=\sum\frac{\alpha}{1-\alpha x}=\sum(\alpha+\alpha^2 x+\alpha^3 x^2+\text{enz.}+\alpha^p x^{p-1}+\text{enz.})=$$

$$=s_1+s_2 x+s_3 x^2+\text{enz.}+s_p x^{p-1}+\text{enz.}..(3)$$

teruggevonden, ten blijke dat de coëfficiënten s niet anders zijn dan de sommen der gelijknamige magten van de wortels α der vergelijking $F\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$. Maar, indien men krachtens de beteekenis der n wortels ω^k uit de eenheid let dat (voor willekeurige y) steeds $\prod_0^{n-1}{}^k(y-\omega^k) = y^n-1$ en dus ook hier $\prod_0^{n-1}{}^k(1-\alpha\omega^k x)=(\alpha x)^n.\prod_0^{n-1}{}^k\left(\frac{1}{\alpha x}-\omega^k\right)=(\alpha x)^n\left\{\left(\frac{1}{\alpha x}\right)^n-1\right\}=$ $= 1-\alpha^n x^n$ is, leert tevens de vorenstaande waarde van $F(x)$ dat dan de norm:

$$\prod_0^{n-1}{}^k F(\omega^k x) = A^n(1-\alpha_1{}^n x^n)(1-\alpha_2{}^n x^n)(1-\alpha_3{}^n x^n)(\text{enz.})=$$

$$= A^n.\prod(1-\alpha^n x^n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

wordt, ten blijke dat, al mogen de overige coëfficiënten a eene minder eenvoudige beteekenis hebben, de in (2) voorkomende coëfficiënten a_0, a_n, a_{2n}, enz. gelijk zijn aan $\frac{A^n}{n}$ maal de eenheid en maal de beurtelings negatief en positief genomen sommen der producten 1 aan 1, 2 aan 2, enz. van de n^{de} magten der evengenoemde wortels α.

Of nu overigens de formulen (4) of (5) met voordeel dienstbaar kunnen worden gemaakt aan de werkelijke periodieke of groepsgewijze getallenberekening der coëfficiënten s van eene of andere aangenomen functie $f(x) = -\frac{F'(x)}{F(x)}$, hangt dáárvan af of men, na hieruit $F(x) = e^{-\int f(x)\,dx}$ opgelost te hebben, er in slaagt de functie (1) regtstreeks te ontwikkelen volgens coëfficiënten a, eenvoudig genoeg om die in (4) of (5) te kunnen gebruiken.

Bepaalt men zich tot het meest eenvoudige geval $n = 1$, als wanneer in de vergelijking $\omega^n - 1 = 0$ geen andere wortel ω^k te pas komt dan de eenheid zelve, en dus ook de norm gelijk is aan $F(x)$ zelve, terwijl dan tevens voor p alleen de waarde $p = 1$ in aanmerking komt, dan gaat de formule (1) over in

$$F'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \text{enz.} + (q+1)\,a_{q+1}\,x^q + \text{enz.};$$

dan vallen (2), (6) en (7) zamen in

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{enz.} + a_qx^q + \text{enz.} =$$
$$= A(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)(1-\alpha_3x)(\text{enz.}) = A\prod(1-\alpha x);$$

dan is (3) te schrijven onder den vorm:

$$-\frac{F'(x)}{F(x)} = s_1 + s_2x + s_3x^2 + \text{enz.} + s_{q+1}x^q + \text{enz.};$$

en dan vereenvoudigen zich de formulen (4) en (5) tot:

$$a_qs_1 + a_{q-1}s_2 + a_{q-2}s_3 + \text{enz.} + a_2s_{q-1} + a_1s_q + a_0s_{q+1} =$$
$$= -(q+1)\,a_{q+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4_1)$$

en

$$(-a_0)^{q+1}\, s_{q+1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & & & & \\ (q-1)a_{q-1} & a_{q-2} & a_{q-3} & a_{q-4} & \cdot & a_0 & 0 \\ q\,a_q & a_{q-1} & a_{q-2} & a_{q-3} & \cdot & a_1 & a_0 \\ (q+1)a_{q+1} & a_q & a_{q-1} & a_{q-2} & \cdot & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \quad ,\ldots (5_1)$$

die zich nu van de formulen van ALBERT GIRARD en NEWTON voor de terugloopende berekening, en van de daaruit afgeleide formule voor de onafhankelijke berekening der sommen van de gelijknamige magten der wortels van eene vergelijking door middel van hare coëfficiënten, zooals deze formulen bijv. voorkomen in Dr. W. FIEDLER's *Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen*, 1862, pag. 44 en 47, en in GÜNTHER, *Determinanten-Theorie*, pag. 137—138, werkelijk door niets anders onderscheiden dan doordat de aldaar gebezigde notatie t hier vervangen is door $q + 1$.

Als toepassing van de voorgaande algemeene methode stelle men zich vóór, de voortbrengende functie $f(x) = -\dfrac{F'(x)}{F(x)}$ in (3) zoo te nemen dat de periodieke terugloopende betrekkingen te voorschijn komen die tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten moeten bestaan. Daartoe zou men, met verschillende schrijvers den p^{den} Bernoulliaanschen coëfficiënt aanduidende door B_{2p-1} (welke notatie voor ons doel regelmatiger voorkomt dan de door anderen gebezigde op zich zelve eenvoudiger notatie B_p), invoerende (volgens C. KRAMP, *Elémens d'arithmétique universelle*, 1808, pag. V—VI) de notatie $p! = 1.2.3.\ldots p$, en thans om te bekorten van den beginne af zooveel mogelijk het Σ-teeken gebruikende, zich deze

coëfficiënten gekenmerkt kunnen denken als die van de ontwikkeling der functie

$$-\frac{1}{2}cot\frac{x}{2}=-\frac{1}{x}+\frac{B_1}{2!}x+\frac{B_3}{4!}x^3+\frac{B_5}{6!}x^5+\text{enz.}+\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}x^{2p-1}+\text{enz.}=$$

$$=-\frac{1}{x}+\sum_1^\infty{}_p\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}x^{2p-1},$$

welke ontwikkeling althans boven die van bijv. — $cot\,x$ zelve reeds het voordeel zou opleveren dat hare coëfficiënten niet nog buitendien met de opvolgende even magten van het getal 2 zijn aangedaan. Door evenwel voor het thans beoogde doel werkelijk van de aanname $f(x)=-\frac{1}{2}cot\frac{x}{2}$ zelve uit te gaan, zou niet alleen de tegenwoordige ontwikkeling zich van de algemeene (3) onderscheiden doordien zij slechts oneven magten van x zou bevatten, hetgeen op zich zelf minder bezwaar zou maken, maar zou, wat van meer belang is, blijken dat, als men op de uit deze $f(x)$ voortvloeijende $F(x)=e^{-\int f(x)\,dx}=$

$=e^{\int\frac{\cos\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}}=\sin\frac{x}{2}$ en de volgens (1) daarbij behoorende ontwikkeling van $\frac{F'(x)}{F(x)}\prod_0^{n-1}{}_k F(\omega^k x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\prod_1^{n-1}{}_k\sin\frac{\omega^k x}{2}$, — welke laatste, blijkens de ontwikkeling van ieder harer factoren, uit termen in x^{n-1}, x^{n+1}, x^{n+3}, enz. zou bestaan en dus niet alleen steeds de termen x^{n-1}, x^{3n-1}, x^{5n-1}, enz., maar als n even is bovendien de termen x^{2n-1}, x^{4n-1}, x^{6n-1}, enz. zou bevatten, — de boven omschreven handelwijze toepaste om tot de norm $\prod_0^{n-1}{}_k\sin\frac{\omega^k x}{2}$ te geraken, dat dan de ontwikkeling van deze norm volgens (2) twee verschillende vormen zou aannemen, namelijk (x^n, x^{3n}, x^{5n}, x^{7n}, enz.) voor n oneven en (x^n, x^{2n}, x^{3n}, x^{4n}, enz.) voor n even. En hieruit zou dus niet alleen de noodzakelijkheid geboren worden om

bij de toepassing der algemeene methode op $f(x) = -\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ de gevallen van n oneven en n even afzonderlijk te gaan behandelen, maar zou men naar gelang daarvan ook op verschillende vormen van terugloopende en van onafhankelijke formulen (4) en (5) voor de Bernoulliaansche coëfficiënten nederkomen; of, beter gezegd, de toepassing der algemeene methode op de gevallen van n even zou terugvoeren tot betrekkingen die niet bij den perioden-aanwijzer n zelf, maar slechts bij $\frac{n}{2}$, zouden behooren, en wél betrekkingen die bovendien waarschijnlijk steeds veel zamengestelder zouden zijn dan die welke thans op eenigzins gewijzigde manier voor zoodanigen aanwijzer $\frac{n}{2}$ regtstreeks zullen worden opgemaakt.

Om de aangevoerde reden namelijk afziende van de toepassing op de evengenoemde functie, zal daarentegen uit de thans volgende bewerking blijken dat een dergelijk bezwaar van splitsing in de oneven en de even gevallen zich niet, of althans slechts in veel geringer mate, voordoet wanneer men, ook ten einde van den beginne af naauwer aan te sluiten aan den gang der bewerking voor het algemeene geval, tot voortbrengende functie kiest $-\frac{1}{2}\cot\frac{\sqrt{x}}{2}$ of, met het oog op het verkrijgen van eene eenvoudige integraalfunctie $F(x)$, liever nog $f(x) = -\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$. Indien men, om ook aan den allereersten term in de cotangenten-ontwikkeling denzelfden vorm te geven als aan alle volgenden en zoodoende de geheele bewerking en ook de uitkomsten in meer beknopten vorm te verkrijgen, tegelijkertijd als 0^{den} Bernoulliaanschen coëfficiënt invoert de notatie $B_{-1} = -1$, (zijnde deze notatie ook in overeenstemming o. a. met de bekende bijzonderheid dat in de formule, waardoor de som der $(2p)^{\text{de}}$ magten van de natuurlijke getallen van 1 tot y wordt uit-

gedrukt in de afdalende magten van y, de laagste term is $(-)^{p-1} B_{2p-1}\, y$), en tevens op grond van $p! = \frac{(p+1)!}{p+1}$ let op de waarde van het symbool $0! = 1$, is dan de uitgangsformule der berekening:

$$f(x) = -\frac{F'(x)}{F(x)} = -\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{p}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}\, x^{p-1}. \quad . \quad . \quad (3')$$

Hieruit klimt men op tot

$$F(x) = e^{-\int f(x)dx} = e^{\int \frac{\cos\frac{\sqrt{x}}{2} d\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}} = \sin\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{x}}{2}.\prod_{1}^{\infty}{}_{q}\left\{1-\frac{x}{(2q\pi)^2}\right\}, \ldots (6')$$

waarin de splitsing in factoren alleen is bijgevoegd om, in verband met het boven in het algemeen omtrent de beteekenis der coëfficiënten s in (3) gezegde, in het voorbijgaan te doen opmerken dat het negatief genomen logarithmisch differentiaalquotient van (6') geeft, lettende op (3') zelve,

$$-\left(\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_{p}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!}\, x^{p-1} = \sum_{1}^{\infty}{}_{q}\frac{\frac{1}{(2q\pi)^2}}{1-\frac{x}{(2q\pi)^2}} =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{q}\left\{\sum_{1}^{\infty}{}_{p}\frac{x^{p-1}}{(2q\pi)^{2p}}\right\} = \sum_{1}^{\infty}{}_{p}\left\{x^{p-1}\sum_{1}^{\infty}{}_{q}\left(\frac{1}{2q\pi}\right)^{2p}\right\},$$

zoodat men hier (met uitsluiting wat dit betreft van B_{-1} voor $p = 0$) naar behooren de bekende uitdrukking $\frac{1}{2}\frac{B_{2p-1}}{(2p)!} =$

$= \sum_{1}^{\infty}{}_{q}\left(\frac{1}{2q\pi}\right)^{2p}$ terugvindt.

$F(x) = \sin\frac{\sqrt{x}}{2}$ gevonden zijnde, komt het verder volgens de algemeene methode hoofdzakelijk aan op de ontwikkeling van

$F'(x) \cdot \prod_1^{n-1}{}_k F(\omega^k x) = \frac{\cos\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}} \cdot \prod_1^{n-1}{}_k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}$ volgens (1), of ook, zonder deze ontwikkeling zelve neder te schrijven, op de bepaling der coëfficiënten in haar product met den noemer $4\sqrt{x}$. Let men nu op, vooreerst dat de eerste term van dit product de waarde van het product zelf voor x oneindig klein, dat is de waarde

$$\prod_1^{n-1}{}_k \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = \frac{\sqrt{\omega^{\frac{n(n-1)}{2}}}\, x^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{\sqrt{(-1)^{n-1}}\, x^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{n-1}{2}}$$

moet hebben; ten tweede dat zoowel in den factor $\cos\frac{\sqrt{x}}{2}$ als in ieder der factoren $\sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}$, en dus ook in het product zelf, de exponenten van x telkens met de eenheid opklimmen; ten derde dat, in denzelfden geest als boven in (1) met de coëfficiënten a voor het algemeene geval geschied is, ook thans weder de door de letters b aan te wijzen en voorloopig nog onbekende coëfficiënten in het product toch reeds dadelijk aangedaan met zoodanige getallenfactoren kunnen worden nedergeschreven als bij hunne later, althans voor $n = 1$ tot en met $n = 6$, te berekenen getallenwaarden in verband met den vorm der eindformulen (4) en (5) voor het tegenwoordige geval meest doelmatig zal blijken, en evenzeer wat de teekens betreft zóó dat dan al deze coëfficiënten b positief zullen blijken; dan kan men het meergenoemde product steeds schrijven onder den volgenden vorm:

$$\cos\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \prod_1^{n-1}{}_k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} =$$

$$= 2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_0^{\infty}{}_q(-)^q\left\{+\frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n-1)!}x^{\frac{(2q+1)n-1}{2}} - \frac{b_{(2q+1)n+1}}{((2q+1)n+1)!}x^{\frac{(2q+1)n+1}{2}}\right.$$

$$\left. - \frac{b_{(2q+1)n+3}}{((2q+1)n+3)!}x^{\frac{(2q+1)n+3}{2}} - \text{enz.} - \frac{b_{(2q+3)n-3}}{((2q+3)n-3)!}x^{\frac{(2q+3)n-3}{2}}\right.$$

$$= 2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_0^{\infty}{}_q(-)^q\left\{\sum_0^{n-1}{}_p\left\{\begin{matrix}(\text{voor } p=0) \\ (\text{voor } p=1 \text{ tot } n-1)\end{matrix}+\right\}\frac{b_{(2q+1)n+2p-1}}{((2q+1)n+2p-1)!}x^{\frac{(2q+1)n+2p-1}{2}}\right.$$

waarin, terwijl bij het eerste Σ-teeken als vroeger $q = 0$, 1, 2, enz. tot oneindig is te nemen, daarentegen voor eene bepaalde waarde van n thans, in verband ook met (3'), bij het tweede Σ-teeken aan p achtervolgens de waarden 0, 1, 2, enz., $n - 1$, in plaats van de vroegere waarden 1, 2, 3, enz. n te geven zijn, en daarbij telkens, zooals aangewezen is, alleen vóór den door $p = 0$ aangeduiden eersten term het teeken $+$, maar vóór alle $n - 1$ overige termen het teeken $-$ te schrijven is.

Met geringe wijziging, noodig doordien men thans met de ten minste voor even waarden van n irrationale functie (1') in plaats van met de vroeger steeds rationale functie (1) te doen heeft, is nu weder de boven gevolgde handelwijze toepasselijk om uit (1') te besluiten tot de ontwikkeling (2) der norm voor het tegenwoordige geval. Immers, door het eerste lid van (1') te schrijven onder den vorm $cot \frac{\sqrt{x}}{2} . \prod_{0}^{k}{}^{n-1} sin \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}$ blijkt dat bij vervanging van x door $\omega^k x$ wél de $n - k$ eerste der onder dit nieuwe Π-teeken voorkomende factoren juist overgaan in de $n - k$ laatste, maar dat daarentegen wegens $\sqrt{\omega^n} = e^{\pi i} = -1$ de k laatste dier factoren overgaan in de k eerste ieder negatief genomen. Van daar dat thans, om uit het evengenoemde eerste lid, dat is uit den eersten term van $4\sqrt{x}$ maal de afgeleide der norm, achtervolgens de overige termen af te schrijven, de vervanging van x door $\omega^k x$ telkens gepaard moet gaan met eene vermenigvuldiging niet alleen met $\sqrt{\omega^k}$, maar bovendien met $(-1)^k = (\sqrt{\omega^n})^k$, dus in het geheel met $\omega^{\frac{(n+1)k}{2}}$. Dezelfde vervanging en vermenigvuldiging nu, toegepast op het tweede lid van (1'), komt voor den algemeenen term van dit lid bijgevolg neder op de enkele vermenigvuldiging met $\omega^{\frac{(n+1)k}{2}} . \omega^{\frac{k((2q+1)n+2p-1)}{2}} = \omega^{k((q+1)n+p)} = \omega^{kp}$; zoodat men, de som van al deze achtervolgens bij $k = 1, 2$, enz., $n - 1$, behoorende uitkomsten en van den oorspronkelijken term in (1') zelve nemende, dezen term vermenigvuldigd vindt met

den factor $\sum_0^{n-1} \omega^{kp}$, dat is, evenals vroeger in het algemeen, steeds met nul, met uitzondering alleen van het binnen de tegenwoordige grenzen $0 \leqq p \leqq n-1$ liggende geval van $p = 0$, als wanneer evengenoemde factor de waarde n verkrijgt. En het blijkt alzoo dat, als men werkelijk, ook in de eerste leden, de evenbedoelde som van (1') en van de overeenkomstige formulen voor $k = 1, 2$, enz., $n-1$, opmaakt en deze som tevens deelt door $4\sqrt{x}$, men thans, onverschillig of n even of oneven is, (en dus zonder in dit opzigt eene onderscheiding te behoeven, die zooals boven vermeld voor $f(x) = -\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$ wél noodig zou geweest zijn), nederkomt op:

$$\frac{d \cdot \prod_0^{n-1} \sin \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}}{dx} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_0^{\infty} (-)^q \frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n-1)!} \cdot \frac{n}{2} x^{\frac{(2q+1)n}{2}-1},$$

zoodat men de norm zelve naar verkiezing kan schrijven onder een der beide volgende vormen:

$$\prod_0^{n-1} \sin \frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_0^{\infty} (-)^q \frac{b_{(2q+1)n-1}}{(2q+1).((2q+1)n-1)!} x^{\frac{(2q+1)n}{2}} =$$

$$= n \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_0^{\infty} (-)^q \frac{b_{(2q+1)n-1}}{((2q+1)n)!} x^{\frac{(2q+1)n}{2}} \quad \ldots \ldots (2')$$

zonder bijtevoegen constante, zooals de onderstelling van x oneindig klein in beide leden leert, terwijl diezelfde onderstelling evenals reeds boven bij (1') bovendien $b_{n-1} = \frac{(n-1)!}{2}$ doet kennen.

Schrijft men nu neder dat het product der tweede leden van (2') en van $4\sqrt{x}$ maal (3') gelijk is aan het negatief genomen tweede lid van (1'), dan kan men daarbij, als r

eene der waarden van 0 tot en met q voorstelt, in den algemeenen term van (2') den aanwijzer q vervangen door $q - r$ en daarentegen in dien van (3') den aanwijzer p door $rn + p$, ten einde de som der coëfficiënten van alle onderling gelijknamige termen, die voor $r = 0, 1, 2$, enz., q, uit een product van den vorm $\left\{\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{(2q-2r+1)n}{2}}\right\}\left\{4\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{rn+p-1}\right\}$ voortkomen, gelijk te kunnen stellen aan den negatief genomen coëfficiënt van $2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{(2q+1)n+2p-1}{2}}$ in (1'). Dit doende en gelijktijdig met $(-)^q \cdot ((2q+1)n + 2p - 1)!$ of met $(-)^q \cdot \frac{((2q+1)n+2p)!}{n}$ vermenigvuldigende, naarmate men van den eersten of van den tweeden vorm van (2') gebruik wenscht te maken, en tevens in het algemeen de notatie $\binom{s}{t} = \frac{s!}{t!(s-t)!} = \binom{s}{s-t}$ voor de onderling gelijke $(t+1)^e$ en $(s-t+1)^e$ binomiaal-coëfficiënten van de s^{de} magt invoerende, verkrijgt men de beide volgende vormen van de periodieke terugloopende betrekking tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten, uitgedrukt in de coëfficiënten b van de ontwikkeling (1'), namelijk:

$$\sum_0^q (-)^r \binom{(2q+1)n+2p-1}{(2q-2r+1)n-1} \frac{b_{(2q-2r+1)n-1}}{2q-2r+1} B_{2rn+2p-1} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}(p=0) & - \\ (p=1 \text{ tot } n-1) & +\end{matrix}\right\} b_{(2q+1)n+2p-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

en

$$\sum_0^q (-)^r \binom{(2q+1)n+2p}{(2q-2r+1)n} b_{(2q-2r+1)n-1} B_{2rn+2p-1} =$$

$$= \left\{\begin{matrix}(p=0) & - \\ (p=1 \text{ tot } n-1) & +\end{matrix}\right\} \frac{(2q+1)n+2p}{n} b_{(2q+1)n+2p-1} \quad \ldots \quad (4'')$$

waarin de uitdrukking onder het Σ-teeken, in wier binomiaal-coëfficiënt men den beneden-aanwijzer desverkiezende ook door $2rn + 2p$ kan vervangen, behoort bij den $(r+1)^{en}$ of algemee-

nen term uit de $q + 1$ termen waaruit het eerste lid bestaat der $(q + 1)^e$ betrekking of vergelijking voor de $(p + 1)^e$ der n verschillende groepen die uit de Bernoulliaansche coëfficiënten, telkens met overspringing van $n - 1$ van hen, gevormd kunnen worden. Ofschoon van deze vormen (4') en (4'') de laatste in zooverre algebraïsch eenvoudiger is dan de gelijkwaardige eerste, dat althans alle coëfficiënten b in zijn eerste lid in hun geheel in plaats van in onderdeelen voorkomen, is daarentegen die laatste vorm voor de getallenberekening waarschijnlijk niet altijd de eenvoudigste. Ook zou men de gevonden terugloopende betrekking, in plaats van onder dezen laatsten vorm, nog wel onder een geheel van binomiaalcoëfficiënten bevrijden en in zooverre meer eenvoudigen vorm kunnen schrijven, en zou hetzelfde voor de zoo straks volgende onafhankelijke formulen (5') en (5'') kunnen gelden, door namelijk in plaats van de coëfficiënten B en b de volledige coëfficiënten zelve aan te houden die in (3') en in (2') en in verband daarmede ook in (1') voorkomen, bijv. in het algemeen onder de notatien $B'_{2p-1} = \frac{B_{2p-1}}{(2p)!}$ en $b'_{s-1} = \frac{b_{s-1}}{s!}$, als wanneer deze coëfficiënten B' en b' zouden zamenhangen volgens de terugloopende betrekking

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r\, b'_{(2q-2r+1)n-1}\, B'_{2rn+2p-1} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (p=0) & - \\ (p=1 \text{ tot } n-1) & + \end{matrix} \right\} \frac{(2q+1)n+2p}{n}\, b'_{(2q+1)n+2p-\ldots}$$

Intusschen zou, in verband met de boven aangevoerde redenen die de keus juist op de coëfficiënten b in plaats van op deze b' bepaald hebben, deze vereenvoudiging meer schijnbaar dan wezenlijk zijn, daar voor de werkelijke getallenberekening de coëfficiënten B' en b' toch weder zamengestelder zijn dan de coëfficiënten B en b, en het daarbij dus wenschelijk zou zijn tot het gebruik van deze laatsten terug te keeren.

Zooals is aangewezen moet in het tweede lid van (4') en van (4'') voor geene andere waarde dan voor $p = 0$, dat is dus alleen voor de eerste der daarbij genoemde n groepen, het teeken — worden genomen. Wenscht men voor dit geval

den oneigenlijken Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{-1} uit te sluiten, die met geen ander doel werd ingevoerd dan om de betrekkingen voor alle groepen onder één gemeenschappelijken vorm (4') of (4'') te kunnen zamenvatten, dan komt door $B_{-1} = -1$ te substitueren en door de teekens om te keeren:

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{(2q+1)n-1}{(2q-2r+1)n-1}\frac{b_{(2q-2r+1)n-1}}{2q-2r+1}B_{2rn-1} =$$

$$= \frac{2q}{2q+1}\,b_{(2q+1)n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4'_0)$$

of

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{(2q+1)n}{(2q-2r+1)n}\,b_{(2q-2r+1)n-1}\,B_{2rn-1} =$$

$$= 2q\,b_{(2q+1)n-1}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4''_0)$$

waarin wederom voor den beneden-binomiaal-aanwijzer ook $2rn$ kan geschreven worden. Deze op zich zelve staande betrekkingen zouden nu eigenaardig, in plaats van zooals aanvankelijk bij behoud van B_{-1}, dat is voor $p = 0$, aan het hoofd, thans voor $p = n$ aan het slot van de betrekkingen voor de n verschillende groepen geschreven moeten worden, in welk geval het trouwens regelmatig zou zijn, ten einde ze zooveel mogelijk in vorm met de betrekkingen voor $p = 1$ tot en met $n - 1$ te doen overeenstemmen, in deze $(4'_0)$ en $(4''_0)$ nog q en r te vervangen door $q + 1$ en $r + 1$ en dus bijv. in plaats van $(4''_0)$ te schrijven:

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{(2q+3)n}{(2q-2r+1)n}\,b_{(2q-2r+1)n-1}\,B_{2rn+(2n-1)} =$$

$$= 2\,(q+1)\,b_{(2q+3)n-1}\,,$$

als wanneer wél moet worden opgelet dat, ofschoon deze laatste vorm overigens in allen deele werkelijk zou overeenstemmen met hetgeen eene onderstelde toepassing van (4'') zelve voor $p = n$ zou opleveren, dergelijke toepassing evenwel in geenen deele geoorloofd is daar zij in het tweede lid den verkeerden factor $2q + 3$ in plaats van den wezenlijk

vereischten factor $2(q+1)$ zou opleveren. En in dit opzig
althans zou dus de regelmaat in de n groepen $p=1$ tot
met n juist bij deze laatste groep verbroken worden, en blij
het ongestoord gebruik van de n groepen $p=0$ tot en m
$n-1$ volgens (4') of (4'') alzoo verkieslijk.

Neemt men in (4') achtervolgens $q=0, 1, 2,$ enz. tot
met eene willekeurige waarde q, dan kan men uit de ald
komende $q+1$ vergelijkingen met $+B_{2p-1}$, $-B_{2n+2p-1}$
$+B_{4n+2p-1}$, enz., $(-)^q B_{2qn+2p-1}$ als $q+1$ onbekend
eene algemeene formule voor de onafhankelijke berekeni
van den willekeurigen Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{2qn+2p}
opmaken. Men vindt zoodoende, geheel op dezelfde wijze
vroeger bij den overgang van de algemeene betrekking
tot (5) omschreven is, behoudens alleen dat thans met $(-$
in plaats van toen met $(-)^{q+1}n$ vermenigvuldigd wordt, d
volgenden $(q+1)^{\text{en}}$ graads-determinant voor dit doel:

(zie (A) op de uitslaande bladz.).

zijnde hierin het tweede lid tusschengevoegd op grond van
boven reeds opgemerkte waarde $b_{n-1}=\frac{(n-1)!}{2}$, zoodat me
van dit tweede lid gebruik makende, in het derde lid aan
volstrekte waarden der coëfficiënten b van (1') gebonden
terwijl daarentegen de gelijkheid van het eerste en het der
lid alleen van de onderlinge verhoudingen dezer coëfficiënt
afhangt. In deze laatste gelijkheid van (5') en van de zo
straks volgende (5''), en in (4'), (4''), $(4'_0)$ en $(4''_0)$ kan b
vendien nog, in denzelfden geest als vroeger in het algeme
voor (4) en (5) bleek, iedere $b_{(2q+1)n+2p-1}$ vermenigvuldi
worden (voor willekeurige λ) met $\lambda^{(2q+1)n+2p-1}$, mits d
tevens iedere $B_{2qn+2p-1}$ worde vermenigvuldigd, thans eve
wel niet met $\lambda^{2qn+2p-1}$, maar met λ^{2qn+2p}; later, bijv. voo
de bij $n=1$ en bij $n=2$ behoorende getallencoëfficiënten
kan deze opmerking van dienst zijn. Eindelijk komt, o
dezelfde wijze als (5') uit (4'), nog uit (4''), maar door daa
voor met $(-)^q n$ te vermenigvuldigen, de gewijzigde vorm:

(zie (B) op de uitslaande bladz.).

$$\frac{+2p-1}{+1} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \binom{(2q-3)n+2p-1}{n-1}\frac{b_{n-1}}{1} & 0 \\ \binom{(2q-1)n+2p-1}{3n-1}\frac{b_{3n-1}}{3} & \binom{(2q-1)n+2p-1}{n-1}\frac{b_{n-1}}{1} \\ \binom{(2q+1)n+2p-1}{5n-1}\frac{b_{5n-1}}{5} & \binom{(2q+1)n+2p-1}{3n-1}\frac{b_{3n-1}}{3} \end{vmatrix} \quad \ldots (5')$$

$$\frac{}{-1} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \binom{(2q-3)n+2p}{n}b_{n-1} & 0 \\ \binom{(2q-1)n+2p}{3n}b_{3n-1} & \binom{(2q-1)n+2p}{n}b_{n-1} \\ \binom{(2q+1)n+2p}{5n}b_{5n-1} & \binom{(2q+1)n+2p}{3n}b_{3n-1} \end{vmatrix} \quad \ldots (5'')$$

Ook bij deze formulen (5′) en (5″) is de aanwijzing herhaald, dat alleen als zij voor $p = 0$ worden toegepast, vóór het derde lid het teeken — genomen moet worden.

Zooals gezegd, om van (4′) of (4″), of ook van (5′) of (5″) gebruik te kunnen maken voor de werkelijke berekening der Bernoulliaansche coëfficiënten, komt alles aan op de kennis der getallenwaarden van de in (1′) optredende coëfficiënten b. Om deze te bepalen zou men bijv. als volgt in de eerste plaats formulen kunnen opmaken waardoor het product der sinussen van eenig aantal willekeurige bogen of hoeken wordt uitgedrukt in de sinussen of in de cosinussen van de algebraïsche sommen dezer bogen; en daarna formulen waardoor de overeenkomstige sommen van deze laatste sinussen of cosinussen achtervolgens worden herleid tot die voor een kleiner aantal bogen. Stellende namelijk

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + \text{enz.} + \frac{x_n}{2} = \sum_1^n{}_k \frac{x_k}{2} = X, \text{ heeft men}$$

$$\prod_1^n{}_k \left(2\,i\,sin\frac{x_k}{2}\right) = \prod_1^n{}_k \left(e^{\frac{ix_k}{2}} - e^{-\frac{ix_k}{2}}\right) =$$

$$= \left\{e^{iX} + (-)^n e^{-iX}\right\} - \sum \left\{e^{i(X-x_1)} + (-)^n e^{-i(X-x_1)}\right\} +$$

$$+ \sum \left\{e^{i(X-x_1-x_2)} + (-)^n e^{-i(X-x_1-x_2)}\right\} - \text{enz.},$$

waarin, de Σ-teekens betrekking hebbende op alle combinatiën van de n bogen x, genomen 1 aan 1, 2 aan 2, enz., $\frac{n-1}{2}$ aan $\frac{n-1}{2}$ of wel $\frac{n}{2}$ aan $\frac{n}{2}$, de laatste term is, voor n oneven: $+ (-)^{\frac{n-1}{2}} \sum \left\{e^{i(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n-1}{2}})} + \right.$ $\left. + (-)^n e^{-i(X-x_1-x_2-\text{enz}-x_{\frac{n-1}{2}})}\right\}$, daarentegen voor n even:

$$+(-)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2}\sum\left\{e^{i(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n}{2}})}+(-)^{n}e^{-i(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n}{2}})}\right\},$$

met voorvoeging in dit laatste geval van den getallencoëfficiënt $\frac{1}{2}$, omdat anders, terwijl in het uitgewerkte product eene zelfde magt van e slechts éénmaal voorkomt, deze volledige term wegens $-(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n}{2}}) =$ $= +(X-x_{\frac{n}{2}+1}-x_{\frac{n}{2}+2}-\text{enz.}-x_n)$ telkens zulk eene magt in wezenlijkheid tweemaal zou bevatten.

Voor n oneven heeft men dus, deelende door $2i$,

$$(-)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\prod_{1}^{n}\sin\frac{x_k}{2} =$$

$$= \sin X-\sum\sin(X-x_1)+\sum\sin(X-x_1-x_2)-\text{enz.}+$$

$$+(-)^{\frac{n-1}{2}}\sum\sin(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n-1}{2}}),\ \ldots\ (8_a)$$

en voor n even, deelende door 2,

$$(-)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}\prod_{1}^{n}\sin\frac{x_k}{2} =$$

$$= \cos X-\sum\cos(X-x_1)+\sum\cos(X-x_1-x_2)-\text{enz.}+$$

$$+(-)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2}\sum\cos(X-x_1-x_2-\text{enz.}-x_{\frac{n}{2}}),\ \ldots\ (8_b)$$

omtrent welke beide formulen (die o. a. ook voorkomen bij J. W. L. GLAISHER in *The London etc. philosophical magazine*, 5th Ser., Vol. 6, n°. 38, Nov. 1878, pag. 335—337) in het voorbijgaan het volgende moge worden aangestipt: vooreerst dat zij door een oneven aantal der bogen x gelijk π te onderstellen, wederkeerig in elkander overgaan; ten tweede dat zij door alle bogen x te vervangen door hunne supplementen, de beide overeenkomstige voor n oneven en voor n even geldende formulen voor de cosinussen-producten opleve-

ren, die trouwens ook regtstreeks uit de ontwikkeling van $\prod_1^n{}_k\left(2\cos\frac{x_k}{2}\right) = \prod_1^n{}_k\left(e^{\frac{ix_k}{2}} + e^{-\frac{ix_k}{2}}\right)$ zouden voortvloeijen, of ook bijv. kunnen bewezen worden zooals bij A. DESBOVES, *Questions de trigonométrie rectiligne*, 2e Ed., 1877, pag. 93—97, n0. 83; ten derde dat de vier gezamenlijke formulen, door daarin alle bogen x onderling gelijk te nemen, als bijzondere gevallen bevatten de bekende formulen voor de ontwikkeling der magten van sinus en van cosinus volgens de sinussen en de cosinussen der veelvouden van den boog. (zie deze o. a. bij G. J. VERDAM, *Summarium der goniometrie* enz., 3e druk, 1858, pag. 41, form. 105 tot 110.)

Wil men nu ieder der voor de sinussen-producten gevonden formulen (8_a) en (8_b) regtstreeks voor de ontwikkeling van het eerste lid van (1') gebruiken, dan dient men thans de tot nog toe aldaar overbodige onderscheiding tusschen de gevallen van n oneven en n even te gaan maken. Is n oneven, dan kan men in het genoemde eerste lid telkens als $k = 2k' + 1$ is, substitueren $\sqrt{\omega^k} = -\sqrt{\omega^{n+k}} = -\omega^{\frac{n+1}{2}+k'}$, en telkens als $k = 2k'$ is, $\sqrt{\omega^k} = +\omega^{k'}$, waardoor dat lid overgaat in $\cos\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \prod_0^{\frac{n-3}{2}}{}_{k'} \sin\left(\frac{-\omega^{\frac{n+1}{2}+k'} \cdot \sqrt{x}}{2}\right) \cdot \prod_1^{\frac{n-1}{2}}{}_{k'} \sin\frac{\omega^{k'}\sqrt{x}}{2} =$

$= (-)^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \prod_1^{n-1}{}_k \sin\frac{\omega^k\sqrt{x}}{2}$ en het dus gelukt is overal den factor ω^k vóór het wortelteeken te brengen: dit maakt dat, als men voor dit geval in de formule (8_a) neemt $x_1 = \pi + \sqrt{x}$ en verder voor $k = 2, 3$, enz., n, telkens $x_k = \omega^{k-1}\sqrt{x}$, die formule niet alleen behoudens deeling door 2^{n-1} reeds eene ontwikkeling voor het eerste lid van (1') geeft, maar eene ontwikkeling die wegens $X = \sum_1^n{}_k \frac{x_k}{2} =$

$= \frac{\pi+\sqrt{x}}{2} + \sum_2^n{}_k \frac{\omega^{k-1}\sqrt{x}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\pi}{2}$ den

eenvoudigen vorm

$$(-)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \prod_{1}^{n-1}{}_{k} \sin\frac{\omega^k \sqrt{x}}{2} =$$

$$= 1 - \sum \cos x_1 + \sum \cos(x_1 + x_2) - \text{enz.} +$$

$$+ (-)^{\frac{n-1}{2}} \sum \cos(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_{\frac{n-1}{2}}) \ldots (8'_a)$$

aanneemt. Is n daarentegen even, dan kan men om tot het eerste lid van (1') te geraken, in de formule (8_b) wel weder $x_1 = \pi + \sqrt{x}$ en verder voor $k = 2, 3,$ enz., n, telkens $x_k = (\pm)^{k-1} \sqrt{\omega^{k-1}}\, x$ nemen, naar verkiezing overal met het bovenste of overal met het onderste teeken, maar dan

wordt $X = \sum_{1}^{n}{}_{k} \frac{x_k}{2} = \frac{\pi + \sqrt{x}}{2} + \sum_{2}^{n}{}_{k} (\pm)^{k-1} \frac{\sqrt{\omega^{k-1}}\, x}{2} =$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{1 - \sqrt{\omega^n}}{1 \mp \sqrt{\omega}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{x}}{1 \mp \sqrt{\omega}}$ afhankelijk van x zelf, en ofschoon men nu het tweede lid van (8_b) wel zou kunnen schrijven onder den vorm

$$\cos X \cdot \left\{ 1 - \sum \cos x_1 + \sum \cos(x_1 + x_2) - \text{enz.} + \right.$$

$$\left. + (-)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum \cos(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_{\frac{n}{2}}) \right\} +$$

$$+ \sin X \cdot \left\{ - \sum \sin x_1 + \sum \sin(x_1 + x_2) - \text{enz.} + \right.$$

$$\left. + (-)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sum \sin(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_{\frac{n}{2}}) \right\}$$

en dus de berekening zou kunnen verrigten door middel van soortgelijke cosinussen van sommen als zoo even en van overeenkomstige sinussen, zou toch niet alleen de toevoeging van deze sinussen, maar vooral ook de zamengesteldheid van $\cos X$ en van $\sin X$ in dit geval, die berekening in het algemeen vrij bewerkelijk maken. Van daar dat het verkieslijk schijnt zich, wat het regtstreeksch gebruik der formulen (8) betreft,

tot het geval van n oneven te bepalen, en de coëfficiënten b in de ontwikkeling van het eerste lid van (1') daarentegen voor n even op andere, later te bespreken wijze af te leiden uit coëfficiënten voor n oneven.

Overgaande tot de verdere ontwikkeling van ieder der in het tweede lid van $(8'_a)$ voorkomende termen, kan men zich daartoe de boven als bijzonder geval $n = 1$ uit de algemeene betrekking (4) afgeleide formule (4_1) volgens GIRARD en NEWTON ten nutte maken, waarin men voor eenig aantal willekeurige grootheden α en voor een willekeurigen coëfficiënt A heeft $a_q = (-)^q A \sum \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q$ en $s_q = \sum \alpha^q$. Neemt men namelijk voor het tegenwoordige doel in die formule n grootheden α aan, in het algemeen bepaald door $\alpha_k = e^{ix_k} = \cos x_k + i \sin x_k$, en voert men daarbij de notatiën $C_q = \sum \cos(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q)$, $S_q = \sum \sin(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q)$, en $c_q = \sum_1^n{}^k \cos q x_k$, $s_q = \sum_1^n{}^k \sin q x_k$ in, (deze laatste alzoo te onderscheiden van s_q in (4_1) zelf), dan heeft men, (4_1) door A deelende, aldaar te vervangen $\frac{a_q}{A}$ door $(-)^q \sum e^{i(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q)} = (-)^q \sum \{\cos(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q) + i \sin(x_1 + x_2 + \text{enz.} + x_q)\} = (-)^q (C_q + i S_q)$ en s_q door $\sum_1^n{}^k e^{iqx_k} = \sum_1^n{}^k (\cos q x_k + i \sin q x_k) = c_q + i s_q$, waardoor men na vermenigvuldiging met $(-1)^q$ en vervanging van q door $q-1$ de formule

$$q(C_q + i S_q) = \sum_1^q{}^r (-)^{r-1} (c_r + i s_r)(C_{q-r} + i S_{q-r})$$

verkrijgt, die zich alzoo splitst in de beide herleidingsformulen

$$q\, C_q = \sum_1^q{}^r (-)^{r-1} (c_r\, C_{q-r} - s_r\, S_{q-r}) \quad \ldots \ldots \quad (9_a)$$

en

$$q\, S_q = \sum_1^q{}^r (-)^{r-1} (c_r\, S_{q-r} + s_r\, C_{q-r}), \quad \ldots \ldots \quad (9_b)$$

zijnde hierin, blijkens $C_0 + i\,S_0 = \frac{a_0}{A} = 1$, te nemen $C_0 = 1$ en $S_0 = 0$. En door herhaalde toepassing van deze beide laatste formulen — die o. a. door $n = 2$ en $q = 2$ en daarna nog bovendien $x_1 = x_2$ te stellen, ook de grondformulen der goniometrie voor $cos\,(x_1 + x_2)$ en $sin\,(x_1 + x_2)$ in zich bevatten — is men derhalve in staat de waarden van C_q voor de opvolgende $q = 1, 2$, enz., $\frac{n-1}{2}$, dat zijn juist de termen in het tweede lid van $(8'_a)$, uit te drukken uitsluitend in de sommen c_q en s_q, die in het tegenwoordige geval met het oog op de ontwikkeling van $(1')$ gemakkelijker te berekenen zijn: immers men heeft in dat geval, lettende dat n oneven is en dat de bogen x_k alsdan de boven opgegeven waarden hebben,

$$c_q = \sum_1^n{}^k cos\,q\,x_k = cos\,q\,(\pi + \sqrt{x}) + \sum_1^{n-1}{}^k cos\,q\,\omega^k\sqrt{x} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} = -\,2\,cos\,q\sqrt{x} + \sum_0^{n-1}{}^k cos\,q\,\omega^k\sqrt{x}, \text{ voor } q \text{ oneven} \\ = \sum_0^{n-1}{}^k cos\,q\,\omega^k\sqrt{x}, \text{ voor } q \text{ even} \end{array}\right\} \ldots (10_a)$$

en $s_q = \sum_1^n{}^k sin\,q\,x_k = sin\,q\,(\pi + \sqrt{x}) + \sum_1^{n-1}{}^k sin\,q\,\omega^k\sqrt{x} =$

$$\left\{\begin{array}{l} = -\,2\,sin\,q\sqrt{x} + \sum_0^{n-1}{}^k sin\,q\,\omega^k\sqrt{x}, \text{ voor } q \text{ oneven} \\ = \sum_0^{n-1}{}^k sin\,q\,\omega^k\sqrt{x}, \text{ voor } q \text{ even} \end{array}\right\} \ldots (10_b)$$

waarin verder

$$\sum_0^{n-1}{}^k cos\,q\,\omega^k\sqrt{x} = \sum_0^{n-1}{}^k \left\{\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{q^{2r}\,\omega^{2kr}}{(2r)!} x^r\right\} = \sum_0^\infty{}^r \left\{(-)^r \frac{q^{2r}}{(2r)!} x^r \cdot \sum_0^{n-1}{}^k \omega^{2kr}\right\}$$

$$= n \sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{q^{2rn}}{(2rn)!} x^{rn} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

is, omdat namelijk $\sum_0^{n-1}{}_k \omega^{2kr}$ steeds gelijk nul, maar alleen wanneer r den vorm rn heeft, gelijk n wordt; en evenzoo is

$$\sum_0^{n-1}{}_k \sin q\,\omega^k \sqrt{x} = \sum_0^{n-1}{}_k \left\{ \sum_0^{\infty}{}_r (-)^r \frac{q^{2r+1}\,\omega^{k(2r+1)}}{(2r+1)!}\, x^{\frac{2r+1}{2}} \right\} =$$

$$= \sum_0^{\infty}{}_r \left\{ (-)^r \frac{q^{2r+1}}{(2r+1)!}\, x^{\frac{2r+1}{2}} \cdot \sum_0^{n-1}{}_k \omega^{k(2r+1)} \right\} =$$

$$= (-)^{\frac{n-1}{2}} n \sum_0^{\infty}{}_r (-)^r \frac{q^{(2r+1)n}}{((2r+1)n)!}\, x^{\frac{(2r+1)n}{2}} \quad \ldots (11_b)$$

Ofschoon nu hiermede de weg is aangewezen om het voor eene willekeurige oneven waarde van n opgemaakte tweede lid van $(8'_a)$ en dan ook dat van $(1')$ werkelijk volgens de opklimmende magten van x ontwikkeld te krijgen, neemt dit niet weg dat reeds bij betrekkelijk kleine n, bijv. bij $n = 7$, als wanneer men in (9) tot $q = \frac{n-1}{2} = 3$ zou moeten gaan, de bewerkingen zeer langwijlig worden en de wet der coëfficiënten b niet zeer eenvoudig. Daarom zullen dan ook in het volgende deze coëfficiënten alleen voor ieder der gevallen $n = 1$ tot en met 6 berekend worden, met dien verstande dat, uithoofde voor $n = 1$, 2 en 3 de ontwikkeling van $(1')$ het gemakkelijkst regtstreeks schijnt te geschieden en uithoofde voor $n = 4$ en 6 de coëfficiënten b het geschiktst volgens de straks te vermelden formule (12) uit die voor $n = 2$ en 3 worden afgeleid, slechts voor $n = 5$ de zoo even omschreven algemeene methode werkelijk zal worden toegepast. Alvorens evenwel tot deze getallenberekeningen voor geheel bepaalde gevallen over te gaan, moge nog met een enkel woord melding worden gemaakt van de mogelijkheid om, wanneer reeds voor eenige door m aangeduide periode de getallencoëfficiënten $b^{(m)}$ op eene of andere wijze bekend zijn geworden, met behulp daarvan de coëfficiënten $b^{(n)}$ voor eene andere willekeurige periode n door terug-

loopende betrekkingen te berekenen. Daartoe toch is de opmerking voldoende dat het quotient van het eerste lid van (1') door het dubbele eerste lid van (2'), namelijk $\frac{1}{2}\cot\frac{\sqrt{x}}{2}$, onafhankelijk is van den aanwijzer n, zoodat men geregtigd is tot hetzelfde besluit ten opzigte van de tweede leden: en in plaats dus van dit laatste quotient in verband te brengen met de ontwikkeling (3'), zooals boven geschied is om tot de terugloopende betrekking (4') tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten en de coëfficiënten $b^{(n)}$ onderling te geraken, kan men het voor het tegenwoordige doel ook gelijk stellen aan het overeenkomstige quotient voor eenigen anderen aanwijzer m, dat is men kan de gelijkheid

$$\frac{+\frac{b^{(n)}_{n-1}}{(n-1)!}x^{\frac{n-1}{2}} - \frac{b^{(n)}_{n+1}}{(n+1)!}x^{\frac{n+1}{2}} - \text{enz.}}{+\frac{b^{(n)}_{n-1}}{1.(n-1)!}x^{\frac{n}{2}} - \frac{b^{(n)}_{3n-1}}{3(3n-1)!}x^{\frac{3n}{2}} + \text{enz.}} = \frac{+\frac{b^{(m)}_{m-1}}{(m-1)!}x^{\frac{m-1}{2}} - \frac{b^{(m)}_{m+1}}{(m+1)!}x^{\frac{m+1}{2}} -}{+\frac{b^{(m)}_{m-1}}{1.(m-1)!}x^{\frac{m}{2}} - \frac{b^{(m)}_{3m-1}}{3(3m-1)!}x^{\frac{3m}{2}} +}$$

nederschrijven die blijkbaar, door in de kruisproducten de coëfficiënten der gelijknamige magten van x in beide leden gelijk te stellen, de bedoelde terugloopende betrekkingen tusschen de reeks der $b^{(m)}$ en die der $b^{(n)}$ onderling zou opleveren. Dat deze betrekkingen evenwel al spoedig, — niet alleen voor de algemeene combinatie (m, n), maar zelfs bijv. voor de meer bijzondere combinatiën $(1, n)$, $(2, n)$ en $(3, n)$, niettegenstaande alsdan de getallencoëfficiënten $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ en $b^{(3)}$ weldra zullen blijken zeer eenvoudig te zijn, en evenzeer bijv. voor de bijzondere combinatie $(n-1, n)$, — niet gemakkelijk meer te overzien zullen zijn, noch wat de teekens noch wat de optredende binomiaal-coëfficiënten betreft, valt in het oog: reden waarom zij dan ook hier niet zullen worden uitgeschreven. Alleen moge, zoolang p kleiner dan of hoogstens gelijk aan het kleinste der beide getallen $m-1$ en $n-1$ genomen wordt, de eenvoudige uit de gelijkstelling der coëfficiënten van $x^{\frac{m}{2}}.x^{\frac{n+2p-1}{2}} = x^{\frac{n}{2}}.x^{\frac{m+2p-1}{2}}$ (of, wat hetzelfde

is, uit de eerste toepassing, namelijk die voor $q = 0$, van (4')) voortvloeijende betrekking $\frac{b^{(m)}_{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{b^{(n)}_{n+2p-1}}{(n+2p-1)!} =$

$= \frac{b^{(n)}_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{b^{(m)}_{m+2p-1}}{(m+2p-1)!}$ worden opgemerkt, waaruit, omdat hier in ieder lid de eerste factor reeds gelijk $\frac{1}{2}$ gebleken is, $b^{(n)}_{n+2p-1} = \frac{(n+2p-1)!}{(m+2p-1)!} b^{(m)}_{m+2p-1}$ en dus bijv. voor $m = n-1$ als bijzonder geval: $b^{(n)}_{n+2p-1} = (n+2p-1)\, b^{(n-1)}_{n+2p-2}$ volgt.

Van meer belang dan deze betrekkingen tusschen $b^{(m)}$ en $b^{(n)}$ is de thans op eenigzins gewijzigde manier te vinden algemeene formule, waardoor men in het geval van een even perioden-aanwijzer n de daarbij behoorende coëfficiënten b regtstreeks kan uitdrukken in de bij den, hetzij even of oneven, perioden-aanwijzer $\frac{n}{2}$ behoorende en door b' aan te duiden coëfficiënten. Daartoe merke men op dat wel steeds, ook voor oneven n, het eerste lid van (1') is te beschouwen als ontstaan uit de vermenigvuldiging van het product van al zijne factoren van oneven rangorde met het product van al zijne factoren van even rangorde, maar dat meer in het bijzonder in het thans bedoelde geval van even n ieder dezer producten, namelijk $cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_{1}^{\frac{n}{2}-1}{}_k sin \frac{\sqrt{(\omega^2)^k x}}{2}$ en $\prod_{0}^{\frac{n}{2}-1}{}_k sin \frac{\sqrt{(\omega^2)^k (\omega x)}}{2}$, uit een zelfde aantal $\frac{n}{2}$ factoren bestaat en, wat meer is, door toepassing van (1') zelve en van (2') op $\frac{n}{2}$ in plaats van op n zich onmiddellijk in de evenbedoelde coëfficiënten b' laat uitdrukken. Immers vooreerst is het eerstgenoemde product niet anders dan het eerste lid van (1') zelf, wanneer men daarin n vervangt door $\frac{n}{2}$ en dus, gelet op $(\omega^2)^{\frac{n}{2}} = 1$, gelijk-

tijdig ω moet vervangen door ω^2; en kan men — wat voor het tegenwoordige doel meer geschikt is — bij deze vervanging het tweede lid van (1') ook zoodanig schrijven dat daarin aan den aanwijzer q, in plaats van alle geheele positieve waarden, achtervolgens slechts alle even waarden 0, 2, 4, enz. tot oneindig gegeven worden, mits dan tevens telkenmale, in plaats van $p = 0$ tot en met $\frac{n}{2} - 1$, daarentegen $p = 0$ tot en met $n - 1$ worde genomen en bij $p = 0$ het teeken $+$, bij $p = 1$ tot $\frac{n}{2} - 1$ het teeken $-$, bij $p = \frac{n}{2}$ weder $-$, bij $p = \frac{n}{2} + 1$ tot $n - 1$ weder $+$ worde gebruikt; zoodat men bij deze opvatting q ook kan vervangen door $2q$ (voor $q = 0, 1, 2$, enz. tot oneindig) of liever nog met het oog op het volgende door $2q - r$ en dus aan (1') toegepast op $\frac{n}{2}$ den vorm

$$\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\prod_{1}^{k}\sin\frac{\sqrt{(\omega^2)^k x}}{2} = 2\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\sum_{0}^{\infty}{}_q(-)^{2q-r}\left\{\sum_{0}^{n-1}{}_p\left\{\begin{matrix}(p=0) & + \\ (p=1 \text{ tot } \frac{n}{2}) & - \\ (p=\frac{n}{2}+1 \text{ tot } n-1) & +\end{matrix}\right\}\frac{b'_{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}}{((4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1)!}x^{\frac{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}{2}}\right\}$$

kan geven, waarin wél te verstaan, omdat het tweede lid met een term in $x^{\frac{\frac{n}{2}-1}{2}}$ moet beginnen, aan de veranderlijke

r alle geheele positieve waarden zijn toe te kennen die den exponent $\frac{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}{2} \geqq \frac{\frac{n}{2}-1}{2}$ maken, dat is alle geheele positieve waarden $r \leqq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n}$. En ten andere komt het tweede bovengenoemde product door in het eerste lid van (2') toegepast op $\frac{n}{2}$ de willekeurige veranderlijke x te vervangen door ωx, waardoor in het laatste lid de algemeene term $(-)^q x^{\frac{(2q+1)n}{2}}$ overgaat in $(-)^q \left(\omega^{\frac{n}{2}}\right)^{q+\frac{1}{2}} x^{\frac{(2q+1)n}{4}}$, dat is wegens $\omega^{\frac{n}{2}} = -1$ in $+ ix^{\frac{(2q+1)n}{4}}$, zoodat men, den aanwijzer q hier vervangende door r, verkrijgt:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin \frac{\sqrt{(\omega^2)^k}(\omega x)}{2} = \frac{n}{2} i \left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \sum_0^{\infty} \frac{b'^{(2r+1)\frac{n}{2}-1}}{\left((2r+1)\frac{n}{2}\right)!} x^{\frac{(2r+1)\frac{n}{2}}{2}}.$$

Omdat nu zooals werd opgemerkt het eerste lid van (1') gelijk is aan het product der eerste leden van de beide laatste vergelijkingen, moet ook de coëfficiënt van den algemeenen term $2\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} x^{\frac{(2q+1)n+2p-1}{2}}$ in het tweede lid van (1') gelijk zijn aan n maal de som der coëfficiënten van alle termen van den vorm $\left\{2\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}{2}}\right\}\left\{\frac{n}{2} i \left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{(2r+1)\frac{n}{2}}{2}}\right\}$ die voor de verschillende toe te laten waarden van de veranderlijke r in de ontwikkeling van het product der tweede leden van deze beide laatste vergelijkingen voorkomen. Schrijft men deze gelijkheid neder, vermenigvuldigt men daarbij tevens met $(-)^q((2q+1)n+2p-1)!$ en merkt men op, voor zoover in (1') en in de eerste der evenbedoelde vergelijkingen de teekens afhangen van p, dat niet alleen voor $p = 0$, maar

evenzeer voor $p = 1$ tot $\frac{n}{2}$ die teekens onderling gelijk, daarentegen voor $p = \frac{n}{2} + 1$ tot $n - 1$ ongelijk zijn, dan verkrijgt men ten slotte de volgende algemeene verdubbelingsformule ter berekening van de bij n behoorende coëfficiënten b door middel van de bij $\frac{n}{2}$ behoorende coëfficiënten b', namelijk:

$$b_{(2q+1)n+2p-1} = \begin{Bmatrix} (p = 0 \text{ tot } \frac{n}{2}) & + \\ (p = \frac{n}{2}+1 \text{ tot } n-1) & - \end{Bmatrix} n \sum_{0}^{r \leqq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}} (-)^{q-r} \binom{(2q+1)n+2p-1}{(2r+1)\frac{n}{2}} b'_{(2r+1)\frac{n}{2}-1} \cdot b'_{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1} \ldots (12)$$

Geheel in denzelfden geest zou men zelfs in het meer algemeene geval waarin de aanwijzer n een willekeurig veelvoud, bijv. het k-voud, is van eenig geheel getal, eene formule kunnen opmaken waardoor de bij n behoorende coëffiënten b worden uitgedrukt in de bij $\frac{n}{k}$ behoorende. Deze algemeene formule zou evenwel een veel meer zamengestelden vorm hebben dan de zoo even voor het geval van $k = 2$ gevondene, terwijl daarentegen, indien men zich bijv. wilde bepalen tot het opmaken van eene dergelijke formule alleen voor de coëfficiënten $b_{(2q+1)n-1}$ voorkomende in de door $p = 0$ aangewezen eerste periodieke groep, en meer in het bijzonder nog voor de twee eerste coëfficiënten, namelijk b_{n-1} en b_{3n-1}, van deze groep, ten einde daarvan ter berekening van B_{2n-1} gebruik te maken in de eerste toepassing ($q = 1$) van ($4''_0$), namelijk $\binom{3n}{n} b_{n-1} B_{2n-1} = 2b_{3n-1}$, — in welk geval men die formule voor $b_{(2q+1)n-1}$ zou kunnen afleiden, zonder (1') noodig te hebben, uit (2')

alleen — alsdan zou blijken dat de voor B_{2n-1} komende formule wederom geene andere is dan die onder determinanten-vorm regtstreeks uit de oplossing van de k eerste toepassingen van $(4''_0)$ op $\frac{n}{k}$ in plaats van op n zelf zou volgen op dezelfde wijze als $(5'')$ is gevolgd uit $(4'')$.

Gaan wij na deze meer algemeene beschouwingen thans zooals gezegd voor de zes allereerste waarden van den perioden-aanwijzer n tot de uitgewerkte berekeningen over.

Voor $n = 1$, als wanneer alleen de waarde $p = 0$ in aanmerking komt, neemt de algemeene vergelijking $(1')$ door het laatste lid voorop te stellen en het eerste lid te ontwikkelen den vorm:

$$2\sum_0^\infty{}_q (-)^q \frac{b_{2q}}{(2q)!} x^q = \cos\frac{\sqrt{x}}{2} = \sum_0^\infty{}_q (-)^q \frac{x^q}{2^{2q}.(2q)!}$$

aan, zoodat men dan onmiddellijk den coëfficiënt

$$b_{2q} = \frac{1}{2^{2q+1}}$$

heeft. Ofschoon men op grond hiervan voor dit geval de betrekking $(4'')$ bij vermenigvuldiging met 2^{2q+1} onder den vorm

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{2q+1}{2r} 2^{2r} B_{2r-1} = -(2q+1)$$

zou kunnen gebruiken, is het, juist omdat nu slechts de enkele door $p = 0$ aangeduide groep bestaat die nu de gezamenlijke Bernoulliaansche coëfficiënten omvat, meest eigenaardig de enkele groep van terugloopende betrekkingen onder de voor deze $p = 0$ opgemaakte vormen $(4'_0)$ of $(4''_0)$ te schrijven. Bepaalt men zich bijv. tot den tweeden van deze vormen, stelt men ook daarin $n = 1$ en voor b hunne evengevonden

waarden, en vermenigvuldigt men tegelijkertijd met 2^{2q}, dan geeft deze de betrekking

$$\sum_1^q (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} 2^{2r-1} B_{2r-1} = q \,, \ldots . \; (4''_0 \text{ voor } n = 1)$$

die dan ook, als men ze niet uit het algemeene geval van eene willekeurige n had willen te voorschijn doen komen, maar zich van den beginne af tot het onderzoek voor $n = 1$ had willen bepalen, dadelijk zou gevonden zijn hetzij door in de ontwikkeling van de identiteit

$$\sin x \,.\, \frac{1}{2} \cot x = \frac{1}{2} \cos x \,, \text{ dat is}$$

$$\left\{\sum_0^{q-r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r+1}}{(2q-2r+1)!}\right\} \left\{\frac{1}{2x} - \sum_1^{\infty} \frac{2^{2r-1} B_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (-)^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} \,,$$

de coëfficiënten van x^{2q} in beide leden onderling gelijk te stellen en de uitkomst met $(-)^q (2q+1)!$ te vermenigvuldigen, hetzij door — wat in wezenlijkheid op hetzelfde nederkomt — in de formule (4_1) van GIRARD en NEWTON, bij vervanging van $q+1$ door q geschreven onder den vorm $\sum_1^q a_{q-r} \, s_r = -\, q \, a_q$ en toegepast op de grootheden $\alpha_1 = \frac{1}{\pi^2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{(3\pi)^2}$, enz., te substitueren $a_{q-r} = \frac{(-1)^{q-r}}{(2q-2r+1)!}$ (blijkens de ontbinding van de functie $\frac{\sin x}{x}$ in haar oneindig aantal factoren) en $s_r = \frac{2^{2r-1} B_{2r-1}}{(2r)!}$ en de uitkomst met $(-)^{q-1} (2q+1)!$ te vermenigvuldigen.

Hetzij door deze laatste substitutie tevens te verrigten in (5_1) en daarna eene kleine herleiding toe te passen, hetzij door het stelsel der q zoo even gevonden vergelijkingen ($4''_0$ voor

$n = 1$) voor $q = 1, 2,$ enz. tot en met q regtstreeks op te lossen ten opzigte van $(-)^{q-1}\, 2^{2q-1}\, B_{2q-1}$, welke oplossing weder zamenhangt met de vroeger ter gelegenheid van (5') enz. besproken mogelijkheid van het invoeren der magten van eenigen factor λ bij b en B, (hier liefst $\lambda = 2$, ten einde alle bovendien verdubbelde coëfficiënten b tot de eenheid te brengen), komt men aanstonds tot de volgende determinantenformule van den q^{den} graad:

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}\,(2r+1)\,.\,2^{2q-1}\,B_{2q-1} =$$

$$\begin{vmatrix}
1 & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \cdots & 0 \\
3 & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
q-1 & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \cdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\
q & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \cdots & \binom{2q+1}{2q-2}
\end{vmatrix}, \quad (5_0'' \text{ voor } n = 1)$$

die alleen een klein verschil in vorm vertoont met de door H. NÄGELSBACH, *Zur independenten Darstellung der Bernoullischen Zahlen*, in SCHLÖMILCH's *Zeitschrift für Mathematik etc.*, 19er Jahrg., 1874, pag. 229, formule (42), gegeven oplossing van zijne op geheel andere wijze verkregen formule (34) (zie ook GÜNTHER, *Determinanten-Theorie*, pag. 127—130). Door de tweede kolom te verminderen met driemaal de eerste, vereenvoudigt zich de vorenstaande formule wegens $\binom{2q+1}{2} - 3q = 2^2\binom{q}{2}$ nog tot de volgende van den $(q-1)^{\text{en}}$ graad, namelijk:

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}(2r+1)\,.\,2^{2q-3}\,B_{2q-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{2}{2} & \binom{5}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{3}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{4}{2} & \binom{9}{4} & \binom{9}{6} & \binom{9}{8} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \binom{q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \binom{2q-1}{8} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ \binom{q}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \binom{2q+1}{8} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix};$$

maar verder kan men eene dergelijke bewerking niet herhalen zonder sommige elementen van den komenden lageren determinant een minder eenvoudigen vorm te zien aannemen.

Ofschoon niet regtstreeks uit de toepassing van de voorgaande algemeene methode voortvloeijende moge, alvorens het geval van $n = 1$ te verlaten, bij deze gelegenheid nog in eenige uitweiding worden getreden. In de eerste plaats zij opgemerkt dat nog eene betrekking van nagenoeg denzelfden vorm als ($4''_0$ voor $n = 1$) komt door gelijkstelling der coëfficiënten van x^{2q-1} in de ontwikkelde identiteit

$$(1 + \cos x)\,.\,\frac{1}{2}\cot x = \frac{1}{2}\,\frac{\cos x + 1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x$$

of

$$\left\{2 + \sum_{1}^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\frac{1}{2x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{r}\frac{2^{2r-1}B_{2r-1}}{(2r)!}x^{2r-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{q}\frac{B_{2q-1}}{(2q)!}\,x^{2q-1} - \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_{q}(-)^{q-1}\frac{2q-1}{(2q-1)!};$$

de bedoelde betrekking namelijk, waarvoor men na eene kleine herleiding vindt

$$\sum_{1}^{r-1}(-)^{r-1}\binom{2q}{2r}2^{2r-1}B_{2r-1}+(-)^{q-1}(2^{2q}-1)B_{2q-1}=\frac{2q-1}{2},$$

is dezelfde die bij NÄGELSBACH voorkomt op pag. 228 als formule (35). Maar van meer belang, in zooverre men dan terugloopende betrekkingen aantreft waarin ieder der opvolgende Bernoulliaansche coëfficiënten is ontdaan van de in beide voorgaande betrekkingen telkens daarbij voorkomende gelijknamige magt van het getal 2, is de opmerking dat op dezelfde wijze als thans $(5''_0)$ uit $(4''_0)$ is afgeleid, eene nog eenvoudiger determinantenformule van den q^{den} graad te vinden is uit de terugloopende betrekking die o. a. dadelijk te voorschijn komt door in de ontwikkelde identiteit

$$\sin x \,.\, \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos x) \text{ of}$$

$$\left\{\sum_{0}^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r+1}}{(2q-2r+1)!}\right\}\left\{\frac{1}{x}-\sum_{1}^{\infty}{}_{r}\frac{B_{2r-1}}{(2r)!}x^{2r-1}\right\}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{x^{2q}}{(2q)!}$$

de wederzijds gelijkgestelde coëfficiënten van x^{2q} met $(-)^q(2q+1)!$ te vermenigvuldigen, namelijk

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r}B_{2r-1}=\frac{2q-1}{2}\ldots\ldots(4^*)$$

Deze terugloopende betrekking — voorzeker wel eene der eenvoudigste onder degenen die alle opvolgende Bernoulliaansche coëfficiënten bevatten — is geene andere dan die men veelal (bijv. door G. S. KLÜGEL, *Mathematisches Wörterbuch*, 1e Abth., 1er Theil, 1803, pag. 253, en *Supplemente*, 1e Abth., 1833, pag. 55—80; door S. F. LACROIX, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e Ed., T. 3, 1819, pag. 84; door R. LOBATTO, *Integraal-rekening*, 1852, pag. 357, noot) opgegeven vindt als het eerst door A. DE MOIVRE, *Miscellanea analytica*, 1730, *Supplem.* pag. 6, te zijn opgemerkt; maar komt mij vóór door JAC. BERNOULLI zelf op pag. 97—98 van zijne *Ars conjectandi*,

1713, niet alleen voor de berekening van zijne vijf eerste coëfficiënten te zijn gebruikt, maar in wezenlijkheid reeds in het algemeen te zijn vermeld, zij het ook, evenals trouwens door DE MOIVRE, zonder bewijs. Die betrekking nu geeft:

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}(2r+1)\,.\,2\,B_{2q-1} = \text{(†)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2q-3 & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ 2q-1 & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{2}{2} & \binom{5}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{4}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{6}{2} & \binom{9}{4} & \binom{9}{6} & \binom{9}{8} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{2q-4}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \binom{2q-1}{8} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ \binom{2q-2}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \binom{2q+1}{8} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix},$$

waarbij de laatste of $(q-1)^e$ graads-determinant weder kon worden achtergevoegd op grond van $\binom{2q+1}{2} - 3\,(2q-1) = \binom{2q-2}{2}$, en welke beide determinanten zich van de beide vorigen alleen onderscheiden in de eerste kolommen, terwijl thans in het eerste lid staat de enkele factor 2 in plaats van 2^{2q-1} of 2^{2q-3} van zoo even. Gaat men verder op overeenkomstige wijze te werk met de identiteit

$$(1 - \cos x)\,.\,\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin x \text{ of}$$

$$\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r+2}}{(2q-2r+2)!}\right\}\left\{\frac{1}{x} - \sum_{1}^{\infty}{}_{r}\frac{B_{2r-1}}{(2r)!}x^{2r-1}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!}$$

dan geeft deze de volgende terugloopende betrekking — dezelfde trouwens die zou verkregen zijn indien men de in den aanhef verworpen toepassing van de algemeene methode op

(†) Alleen om ruimte te sparen zijn hier, en verder in eenige dergelijke gevallen, de determinanten in kleiner type afgedrukt.

de functie $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ in plaats van op $f(x)=-\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$ werkelijk, en wél voor $n=2$, had uitgevoerd en daartoe had geschreven $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}$, — namelijk

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{2q+2}{2r}B_{2r-1}=q,\ \ldots\ (4^{**})$$

waaruit

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}(2r+1).((q+1)!)\,B_{2q-1}=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{4}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{6}{2} & \binom{6}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{8}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ q-1 & \binom{2q}{2} & \binom{2q}{4} & \binom{2q}{6} & \vdots & \binom{2q}{2q-2} \\ q & \binom{2q+2}{2} & \binom{2q+2}{4} & \binom{2q+2}{6} & \vdots & \binom{2q+2}{2q-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{3}{2} & \binom{6}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{5}{2} & \binom{8}{4} & \binom{8}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{7}{2} & \binom{10}{4} & \binom{10}{6} & \binom{10}{8} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \binom{2q-3}{2} & \binom{2q}{4} & \binom{2q}{6} & \binom{2q}{8} & \vdots & \binom{2q}{2q-2} \\ \binom{2q-1}{2} & \binom{2q+2}{4} & \binom{2q+2}{6} & \binom{2q+2}{8} & \vdots & \binom{2q+2}{2q-2} \end{vmatrix},$$

zijnde de laatste of verlaagde determinant weder verkregen op grond van $\binom{2q+2}{2}-6q=\binom{2q-1}{2}$. En trekt men eindelijk van de terugloopende betrekking (4**) de voorgaande (4*) af, dan heeft men wegens $\binom{2q+2}{2r}-\binom{2q+1}{2r}=$ $=\binom{2q+1}{2r-1}\left\{\frac{2q+2}{2r}-\frac{2q-2r+2}{2r}\right\}=\binom{2q+1}{2r-1}$ onmiddellijk

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r-1}B_{2r-1}=\frac{1}{2},$$

dat is de eenvoudige door NÄGELSBACH op pag. 229 op ge-

heel andere wijze gevonden formule (41), die trouwens ook, onafhankelijk van (4*) en (4**), regtstreeks te voorschijn komt door slechts de onderling gelijkgestelde coëfficiënten van x^{2q+1} in beide leden der ontwikkelde identiteit

$$(1-\cos x).\frac{d\left(-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)}{dx}=2\sin^2\frac{x}{2}\left\{-\frac{1}{2}\left(\cot\frac{x}{2}-\frac{x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)\right\}=\frac{1}{2}(-\sin x+x$$

dat is

$$\left\{\sum_0^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r+2}}{(2q-2r+2)!}\right\}\left\{\sum_1^{r}\frac{B_{2r-1}}{(2r-1)!}x^{2r-1}\right\}=\frac{1}{2}\sum_1^{q}(-)^{q+1}\frac{x^{2q+1}}{(2q+1)}$$

met $(-)^{q+1}(2q+1)!$ te vermenigvuldigen. Deze formule nu geeft de oplossing

$$\prod_0^q(2r+1).(q!)2\,B_{2q-1}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & \binom{5}{1} & \binom{5}{3} & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & \binom{7}{1} & \binom{7}{3} & \binom{7}{5} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{2q-1}{1} & \binom{2q-1}{3} & \binom{2q-1}{5} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-3} \\ 1 & \binom{2q+1}{1} & \binom{2q+1}{3} & \binom{2q+1}{5} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-3} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & \binom{5}{3} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{7}{3} & \binom{7}{5} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{9}{3} & \binom{9}{5} & \binom{9}{7} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q-2 & \binom{2q-1}{3} & \binom{2q-1}{5} & \binom{2q-1}{7} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-3} \\ q-1 & \binom{2q+1}{3} & \binom{2q+1}{5} & \binom{2q+1}{7} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-3} \end{vmatrix}$$

waarvan de eerste vorm in wezenlijkheid niet onderscheiden is van NÄGELSBACH's formule (45) en zich tot den tweeden vorm laat herleiden op grond van $\binom{2q+1}{1}-3.1=2(q-1)$.

Zoo even is gebruik gemaakt van het differentiaal-quotient van $\left(-\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\right)$ ten opzigte van x. Gaat men nog op dezelfde wijze te werk met dat van $\left(-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)$ zelf, dan heeft men:

$$(1-\cos x).\frac{d\left(-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)}{dx}=2\sin^2\frac{x}{2}.\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2},$$

dat is

$$\left\{\sum_0^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r+2}}{(2q-2r+2)!}\right\}\left\{\frac{1}{x^2}+\sum_1^{\infty}\frac{(2r-1)B_{2r-1}}{(2r)!}x^{2r-2}\right\}=\frac{1}{2},$$

gevende door voor $q \gtreqless 1$ den coëfficiënt van x^{2q} gelijk nul te stellen:

$$\sum_1^{q}(-)^{r-1}(2r-1)\binom{2q+2}{2r}B_{2r-1}=1,$$

eene uitkomst die, evenals de voorgaande gevonden werd door (4*) af te trekken van (4**), ook verkregen wordt door $(2q+2)$ maal (4*) af te trekken van $(2q+1)$ maal (4**).

Nog kunnen, door dezelfde formulen (4*) en (4**) op geschikte wijze met elkander in verband te brengen, daaruit zonder veel moeite de opmerkelijke door M. A. STERN, *Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen*, in *Abhandl. der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 23er Band, 1878, pag. 7—8, medegedeelde betrekkingen worden afgeleid, die zich van alle overigen van dezelfde soort onderscheiden doordien zij ter berekening van eenigen Bernoulliaanschen coëfficiënt niet terugloopen over alle voorgaande, maar slechts over een zeker aantal aan den bedoelden onmiddellijk voorafgaande Bernoulliaansche coëfficiënten. Vervangt men namelijk in (4*) den aanwijzer q door $q-l$, dan gaat zij over in

$$\sum_1^{q}(-)^{r-1}\binom{2q-2l+1}{2r}B_{2r-1}=\frac{2q-2l-1}{2},\quad\ldots\quad(4_l^*)$$

waarbij wel te verstaan q als bovengrens voor r bij het Σ-teeken zonder bezwaar onveranderd kon aanblijven omdat, al moet ook deze grens in werkelijkheid $q-l$ worden, toch voor elken door $r \geqq q-l+1$ aangeduiden term de binomiaal-coëfficiënt $\binom{2q-2l+1}{2r}$ wegens $2r > 2q-2l+1$ nul wordt en al dergelijke termen dus reeds daardoor van zelf verdwijnen. Dezelfde vervanging toegepast op (4**) doet deze om dezelfde reden, behoudens alleen dat nu voor $r = q-l+1$ de binomiaal-coëfficiënt $\binom{2q-2l+2}{2r}$ gelijk 1 wordt, overgaan in

$$\sum_{1}^{q-l}(-)^{r-1}\binom{2q-2l+2}{2r}B_{2r-1}-(-)^{q-l}B_{2q-2l+1}=\frac{2q-2l}{2}\ldots(4_l^{**})$$

Stelt men zich nu voor dat, k een willekeurig oneven of even getal zijnde, alle op deze wijze van $l=0$ tot en met $l=\frac{k-1}{2}$ of $\frac{k}{2}$ te verkrijgen $k+1$ betrekkingen in de navolgende orde naast elkander geplaatst worden, namelijk:

$$(4^{**}), (4^{*}), (4_1{}^{**}), (4_1{}^{*}), (4_2{}^{**}), (4_2{}^{*}), (4_3{}^{**})\ldots(4_{\frac{k-1}{2}}{}^{*}) \text{ of } (4_{\frac{k}{2}}{}^{**}),$$

waarbij dus zoowel de boven-aanwijzers of zoogenaamde bases van de in de eerste leden bij een zelfden B_{2r-1} voorkomende binomiaal-coëfficiënten alsook de tweede leden zelve eene gewone afdalende rekenkundige reeks vormen, en past men, evenals hierboven de formule (41) van NÄGELSBACH reeds als het verschil van de beide eerste dezer betrekkingen werd opgemaakt, thans meer in het algemeen op alle $k+1$ betrekkingen de bewerking toe waardoor men, bij herhaling iedere volgende van de voorgaande aftrekkende, den eersten term der rij van hare verschillen van de k^{de} orde verkrijgt, dan heeft men volgens eene der hoofdformulen uit de leer der reeksen de betrekking:

$$\sum_1^q (-)^{r-1}\left\{\binom{2q+2}{2r}-\binom{k}{1}\binom{2q+1}{2r}+\binom{k}{2}\binom{2q}{2r}-\text{enz.}+\right.$$

$$\left.+(-)^k\binom{k}{k}\binom{2q-k+2}{2r}\right\}B_{2r-1}+(-)^q\left[\binom{k}{2}B_{2q-1}-\right.$$

$$\left.-\binom{k}{4}B_{2q-3}+\binom{k}{6}B_{2q-5}-\text{enz.}+\begin{cases}(-)^{\frac{k-1}{2}-1}\binom{k}{k-1}B_{2q-k+2}\\ \text{of}(-)^{\frac{k}{2}-1}\binom{k}{k}B_{2q-k+1}\end{cases}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2q-\binom{k}{1}(2q-1)+\binom{k}{2}(2q-2)-\text{enz.}+(-)^k\binom{k}{k}(2q-k)\right\}.$$

Hierin komt, stellende $\Delta\binom{2q+2}{2r}=\binom{2q+2}{2r}-\binom{2q+1}{2r}=$ $=\binom{2q+1}{2r-1}$, de coëfficiënt van $(-)^{r-1}B_{2r-1}$ in den eersten term vóór als $\Delta^k\binom{2q+2}{2r}=\Delta^{k-1}\binom{2q+1}{2r-1}=\Delta^{k-2}\binom{2q}{2r-2}=$ $=\text{enz.}=\binom{2q-k+2}{2r-k}$, terwijl het tweede lid als k^{de} verschil eener reeks van de eerste orde steeds gelijk nul, behalve alleen voor $k=1$ gelijk $\frac{1}{2}$ is, zoodat men de evengevonden betrekking ook aldus kan schrijven:

$$(-)^{r-1}\binom{2q-k+2}{2r-k}B_{2r-1}+(-)^q\sum_r^q(-)^{r-1}\binom{k}{2r}B_{2q-2r+1}=\begin{cases}(\text{voor } k=1)\frac{1}{2}\\ (\text{voor } k>1)\,0\end{cases},$$

(waarin om dezelfde reden als boven weder q als bovengrens van den tweeden term kon worden toegelaten), of beknopter nog, indien men in den eersten term den veranderlijken aanwijzer r door de notatie $q-r+1$ vervangt,

$$(-)^{r-1}\left\{\binom{2q-k+2}{2r}-\binom{k}{2r}\right\}B_{2q-2r+1}=\begin{cases}(\text{voor } k=1)\,(-)^{q-1}\cdot\frac{1}{2}\\ (\text{voor } k>1)\qquad 0\end{cases}.$$

Gaat men thans geheel dezelfde handelwijze nog eens herhalen voor de reeks van $k+1$ betrekkingen (4_l^*) en (4_l^{**}) die men verkrijgt door van de zoo even gebruikte reeks de allereerste betrekking, namelijk (4**), weg te laten, maar daarentegen aan het slot nog eene volgende betrekking $\left(4_{\frac{k+1}{2}}^{**}\right)$ of $\left(4_{\frac{k}{2}}^{*}\right)$ toe te voegen; of — wat volgens de natuur dezer reeksen en van de daarop toegepaste bewerking op hetzelfde moet nederkomen, maar voor de uitvoering veel gemakkelijker is — vermindert men de laatst gevonden uitkomst met degene waarin zij overgaat bij vervanging van k door $k+1$ en voor wier tweede lid dus in allen gevalle nul moet worden genomen, dan verkrijgt men nog de nagenoeg gelijkvormige:

$$\sum_1^q{}_r(-)^{r-1}\left\{\binom{2q-k+1}{2r-1}+\binom{k}{2r-1}\right\}B_{2q-2r+1}=\begin{cases}(\text{voor } k=1)\,(-)^{r-1}\\(\text{voor } k>1)\quad 0\end{cases}$$

Dat de twee aldus gevonden betrekkingen werkelijk, uitgaande van eenigen Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{2q-1}, niet alle voorgaande coëfficiënten bevatten en dat men ze dus zou kunnen noemen gedeeltelijk of onvolledig of afgebroken terugloopende betrekkingen, is duidelijk tengevolge van het nul worden van eenige der daarin voorkomende binomiaalcoëfficiënten; en dat zij overigens dezelfde zijn als de aangehaalde van STERN, blijkt door slechts in de eerste te vervangen $2q-k+2$ en k door n en m, en in de tweede $2q-k+1$ en k door n en m, en door te letten op het onderscheid in de notatie der Bernoulliaansche coëfficiënten zelve.

Na nog in het voorbijgaan de uit

$$\frac{\sin 2x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos x\right\}$$

voortvloeijende formule

$$\sum_1^q{}_r(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r}2^{2q-2r}B_{2r-1}=\frac{(2q+1)(2^{2q-1}+1)-2^{2q+1}}{2}$$

te hebben vermeld, kunnen ten slotte van deze op den perioden-aanwijzer $n = 1$ betrekking hebbende beschouwingen ook uit bepaalde verbindingen van de boven gevonden determinanten-vormen nog andere worden afgeleid. O. a. verdienen de aandacht de beiden van den q^{den} graad die men verkrijgt door óf het viervoud, óf het dubbel van ($5''_0$ voor $n = 1$) te verminderen met den eersten vorm van (5*), namelijk:

$$\prod_0^q (2r+1) \cdot 2\,(2^{2q}-1)\,B_{2q-1} -$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \binom{2q-1}{1} & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ \binom{2q+1}{1} & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix}$$

en $$\prod_0^q (2r+1) \cdot 2\,(2^{2q-1}-1)\,B_{2q-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{3}{0} & \binom{3}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{7}{0} & \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \binom{2q-1}{0} & \binom{2q-1}{2} & \binom{2q-1}{4} & \binom{2q-1}{6} & \vdots & \binom{2q-1}{2q-2} \\ \binom{2q+1}{0} & \binom{2q+1}{2} & \binom{2q+1}{4} & \binom{2q+1}{6} & \vdots & \binom{2q+1}{2q-2} \end{vmatrix}$$

die evenwel geen van beiden, de eerste wegens $\binom{2q+1}{2} -$ $- \binom{2q+1}{1} = (2q+1)(q-1)$ en de tweede wegens $\binom{2q+1}{2} - 3\binom{2q+1}{0} = (2q+3)(q-1)$, vatbaar zijn om op overeenkomstige wijze als boven tot eenvoudige determinanten van den $(q-1)^{\text{en}}$ graad herleid te worden. Gelet op

$$tg\frac{x}{2} = \frac{cos^2\frac{x}{2} - cos\,x}{sin\frac{x}{2}\,cos\frac{x}{2}} = cot\frac{x}{2} - 2\,cot\,x = \sum_0^\infty \frac{2(2^{2q}-1)B_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}$$

en

$$cosec\,x = \frac{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}}{2\,sin\frac{x}{2}\,cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}cot\frac{x}{2} + \frac{1}{2}tg\frac{x}{2} = \sum_0^\infty \frac{2(2^{2q-1}-1)B_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q}$$

geeft de eerste dezer determinanten de tangenten-, de tweede de cosecanten-coëfficiënten (vergelijk hiermede ook het aan het slot omtrent deze coëfficiënten aangevoerde). De tweede is dezelfde die onder meer andere dergelijke formulen voorkomt op pag. 12, N°. 4, bij J. HAMMOND, *On the relation between* BERNOULLI's *numbers and the binomial coëfficiënts*, in *Proceedings of the London mathematical society*, Vol. 7, 1875—1876, pag. 9—14.

In het geval van $n = 2$ of $\omega^2 - 1 = 0$, als wanneer $\omega = e^{\pi i} = cos\,\pi + i\,sin\,\pi = -1$, dus $\sqrt{\omega} = i$ te nemen is en alleen $p = 0$ en $p = 1$ in aanmerking komen, geeft de algemeene vergelijking (1'):

$$2\left\{\left(\frac{i}{2}\right)\sum_0^\infty{}_q(-)^q\right\}+\frac{b_{4q+1}}{(4q+1)!}x^{\frac{4q+1}{2}}-\frac{b_{4q+3}}{(4q+3)!}x^{\frac{4q+3}{2}}\Bigg\}=$$

$$=\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\frac{i\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(1+i)\sqrt{x}}{2}-\sin\frac{(1-i)\sqrt{x}}{2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_0^\infty{}_r(-)^r\frac{(1+i)^{2r+1}-(1-i)^{2r+1}}{2^{2r+1}.(2r+1)!}x^{\frac{2r+1}{2}}=$$

$$=\frac{i}{2}\left\{\sum_0^\infty{}_q\frac{(-)^q x^{\frac{4q+1}{2}}}{2^{2q}(4q+1)!}+\sum_0^\infty{}_q\frac{(-)^{q+1}x^{\frac{4q+3}{2}}}{2^{2q+1}(4q+3)!}\right\},$$

waarin namelijk het laatste lid kon worden bijgeschreven omdat, als men let op $(1\pm i)^2=\pm 2i$, de teller $(1+i)^{2r+1}-$ $-(1-i)^{2r+1}=(1+i)(2i)^r-(1-i)(-2i)^r$ in het voorlaatste lid, telkens wanneer $r=2q$ is, gelijk $2i\,(2i)^{2q}=$ $=(-)^q 2^{2q+1}i$ blijkt te worden, daarentegen telkens wanneer $r=2q+1$ is, gelijk $2(2i)^{2q+1}=(-)^q 2^{2q+2}i$. En de gelijkstelling van de overeenkomstige coëfficiënten in het eerste en het laatste lid der vorenstaande vergelijking doet alzoo onmiddellijk de voor $n=2$ geldende waarden

$$b_{4q+1}=\frac{1}{2^{2q+1}},$$

$$b_{4q+3}=\frac{1}{2^{2q+2}}$$

kennen, wier substitutie voor $p=0$ en voor $p=1$ in (4″) bij vermenigvuldiging met 2^{2q+1} en met 2^{2q+2} geeft de beide terugloopende betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned}\sum_0^r{}_r(-)^r\binom{4q+2}{4r}2^{2r}B_{4r-1}&=-\frac{4q+2}{2},\\ \sum_0^r{}_r(-)^r\binom{4q+4}{4r+2}2^{2r+1}B_{4r+1}&=\frac{4q+4}{2},\end{aligned}\right\}\ldots(4''\text{ voor }n=2)$$

die ook onder den enkelen vorm

$$\sum_{0\text{ of }1}^{q}(-)^{\frac{r}{2}\text{ of }\frac{r+1}{2}}\binom{2q+2}{2r}2^r\,B_{2r-1}=-\frac{2q+2}{2}$$

zouden zijn zamen te vatten, mits dan hierin voor r alleen óf de opvolgende even óf de opvolgende oneven getallen nemende. Overigens is de eerste van deze betrekkingen volgens $(4''_0)$ bij vermenigvuldiging met 2^{2q} ook te vervangen door

$$\sum_{1}^{q}(-)^{r-1}\binom{4q+2}{4r}2^{2r-1}\,B_{4r-1}=q\,,$$

terwijl de tweede wel in beide leden door 2 deelbaar is, maar in verband ook met de overeenkomstige formulen voor $n=1$, 3, 4, 5, 6 regelmatigheidshalve onder den voorgestelden vorm is aangehouden.

Deze beide betrekkingen, en wel die voor B_{4r-1} onder den laatst geschreven vorm, kwamen, evenals verschillende der boven voor $n=1$ beschouwde, met eenige wijzigingen in de notatie reeds vóór in eene door mij in de vergadering van 30 September 1876 van de Kon. Akademie van Wetenschappen ingezonden bijdrage, die evenwel niet werd uitgegeven, daar zij kort daarna teruggenomen werd ten einde zooals thans geschiedt het laatste en op de Bernoulliaansche coëfficiënten betrekking hebbende gedeelte daarvan, waarin toen alleen de perioden $n=1$ en $n=2$ waren onderzocht, ook op perioden van hoogere orden uit te breiden. In die bijdrage werden op het voetspoor van het boven voor $n=1$ verrigte o. a. buitendien nog voor $n=2$ uit de herleiding van de identiteiten

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\pm\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\cos x}{\sin x}\pm\frac{i(1+\cos ix)}{\sin ix}\right\}=$$

$$=\frac{2(\sin ix\pm i\sin x)+(1\pm i)\sin(1+i)x-(1\mp i)\sin(1-i)x}{2\{\cos(1-i)x-\cos(1+i)x\}}$$

de beide volgende eenigzins meer zamengestelde terugloopende betrekkingen

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r \binom{4q+2}{4r} 2^{2q-2r} B_{4r-1} = -\frac{4q+2}{4}\{2^{2q}+(-1)^q\}$$

en

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r \binom{4q+4}{4r+2} 2^{2q-2r} B_{4r+1} = \frac{4q+4}{4}\{2^{2q+1}-(-1)^q\}$$

tusschen dezelfde coëfficiënten B_{4r-1} en B_{4r+1} van zoo even afgeleid, betrekkingen die in verband met de beide voorgaande, bijv. door optelling en door aftrekking, nog weder nieuwe opleveren; terwijl er aldaar ten slotte op werd gewezen dat dezelfde behandeling toegepast op de identiteiten

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} \pm \frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin x}{1-\cos x} \pm \frac{i\sin ix}{1-\cos ix}\right\} =$$

$$= \frac{2(\sin x \pm i\sin ix) - (1\pm i)\sin(1+i)x - (1\mp i)\sin(1-i)x}{2\{2(1-\cos x-\cos ix)+\cos(1+i)x+\cos(1-i)x\}}$$

betrekkingen van nog meer zamengestelden vorm zou opleveren. Voor deze laatste betrekkingen namelijk vindt men:

$$(-)^r\binom{4q+4}{4r}\{2^{2q-2r+1}+(-1)^{q-r}\}B_{4r-1} = -\frac{4q+4}{4}\{2^{2q+1}+(-1)^q\}$$

en

$$(-)^r\binom{4q+6}{4r+2}\{2^{2q-2r+1}+(-1)^{q-r}\}B_{4r+1} = \frac{4q+6}{4}\{2^{2q+2}+(-1)^q\};$$

zij zijn weder dezelfde die zouden gekomen zijn door voor $n=4$ te werken met $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ in plaats van voor $n=2$ met

$$-\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$$, dat wil zeggen door de identiteit

$$-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{ix}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(-\frac{ix}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{ix}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(-\frac{ix}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\frac{\sin x(1-\cos ix)}{(1-\cos x)(1-\cos ix)}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x-\frac{1}{2}\{\sin(1+i)x+\sin(1-i)x\}}{1-(\cos x+\cos ix)+\frac{1}{2}\{\cos(1+i)x+\cos(1-i)x\}}$$

op te stellen en verder te ontwikkelen; en, lettende op den vrij zamengestelden vorm van de laatst medegedeelde betrekkingen in vergelijking van de beide betrekkingen (4″ voor $n=2$), heeft men vooral hier een sprekend bewijs van het voordeel dat het gebruik der functie $-\frac{\cot\frac{\sqrt{x}}{2}}{4\sqrt{x}}$ in tegenstelling van $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ oplevert.

Bepaalt men zich dus tot de twee evengenoemde betrekkingen (4″ voor $n=2$) en past men evenals vroeger in het algemeen thans ieder van deze weder achtervolgens toe voor $q=0,\ 1,\ 2,$ enz. tot en met q, dan kan men uit dit eerste stelsel de onbekende $(-)^q\,2^{2q}\,B_{4q-1}$ en uit het tweede stelsel de onbekende $(-)^q\,2^{2q}\,B_{4q+1}$ oplossen; welke oplossingen men ook desverkiezende regtstreeks uit de algemeene oplossing (5″) zou kunnen afschrijven, daarbij denkende aan de aldaar besproken invoering der magten van een factor λ bij b en B, waarvoor dan in dit geval te nemen $\lambda=\sqrt{2}$, ten einde alle coëfficiënten b na voorafgaande vermenigvuldiging met $\sqrt{2}$ tot de eenheid te brengen. Hoe het zij, men verkrijgt op deze wijze voor den algemeenen Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{4q-1} van even en B_{4q+1} van oneven rang de volgende onafhankelijke formulen:

$$\prod_0^q{}_r \binom{4r+2}{2} . 2^{2q} B_{4q-1} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & \binom{2}{0} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{6}{0} & \binom{6}{4} & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & \binom{10}{0} & \binom{10}{4} & \binom{10}{8} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 2q-1 & \binom{4q-2}{0} & \binom{4q-2}{4} & \binom{4q-2}{8} & \vdots & \binom{4q-2}{4q-4} \\ 2q+1 & \binom{4q+2}{0} & \binom{4q+2}{4} & \binom{4q+2}{8} & \vdots & \binom{4q+2}{4q-4} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & \binom{6}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{10}{4} & \binom{10}{8} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{14}{4} & \binom{14}{8} & \binom{14}{12} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ q-1 & \binom{4q-2}{4} & \binom{4q-2}{8} & \binom{4q-2}{12} & \vdots & \binom{4q-2}{4q-4} \\ q & \binom{4q+2}{4} & \binom{4q+2}{8} & \binom{4q+2}{12} & \vdots & \binom{4q+2}{4q-4} \end{vmatrix}$$

$$\text{en } \prod_0^q{}_r \binom{4r+4}{2} . 2^{2q} B_{4q+1} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{4}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{8}{2} & \binom{8}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{12}{2} & \binom{12}{6} & \binom{12}{10} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ q & \binom{4q}{2} & \binom{4q}{6} & \binom{4q}{10} & \vdots & \binom{4q}{4q-2} \\ q+1 & \binom{4q+4}{2} & \binom{4q+4}{6} & \binom{4q+4}{10} & \vdots & \binom{4q+4}{4q-2} \end{vmatrix} = 2^4 \begin{vmatrix} \binom{2}{2} & \binom{8}{6} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{8}{2} & \binom{12}{6} & \binom{12}{10} & 0 & \vdots & 0 \\ \binom{4}{2} & \binom{16}{6} & \binom{16}{10} & \binom{16}{14} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \binom{q}{2} & \binom{4q}{6} & \binom{4q}{10} & \binom{4q}{14} & \vdots & \binom{4q}{4q-2} \\ \binom{q+1}{2} & \binom{4q+4}{6} & \binom{4q+4}{10} & \binom{4q+4}{14} & \vdots & \binom{4q+4}{4q-2} \end{vmatrix},$$

die ieder eerst als $(q+1)^e$ graads-, maar daarnaast als slechts q^{de} graads-determinant zijn nedergeschreven, welk laatste mogelijk was, voor B_{4q-1} hetzij door te letten op $\binom{4q+2}{0} - (2q+1) = -2(q)$, hetzij door, wat op hetzelfde nederkomt, regtstreeks van de boven voor $n=2$ uit $(4''_0)$ gevonden terugloopende betrekking gebruik te maken voor $q = 1, 2$, enz. tot en met q; en voor B_{4q+1} door te letten op $\binom{4q+4}{2} - 6(q+1) = 2^4 \binom{q+1}{2}$.

Overgaande tot het geval van $n=3$ of $\omega^3 - 1 = 0$, waarvoor $p = 0$, 1 en 2 te nemen is, herleidt zich de ver-

gelijking (1'), indien men let op $\sqrt{\omega} = -\omega^2$ en $\sqrt{\omega^2} = \omega$ en op $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, achtervolgens tot:

$$2\left(\frac{i}{2}\right)^2 \sum_0^\infty{}_q (-)^q \left\{ + \frac{b_{6q+2}}{(6q+2)!} x^{3q+1} - \frac{b_{6q+4}}{(6q+4)!} x^{3q+2} - \frac{b_{6q+6}}{(6q+6)!} x^{3q+3} \right\}$$

$$= \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\sqrt{\omega}\,x}{2} \sin\frac{\sqrt{\omega^2}\,x}{2} = -\cos\frac{\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\omega^2\sqrt{x}}{2} \sin\frac{\omega\sqrt{x}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \left\{ \cos\frac{(\omega-\omega^2)\sqrt{x}}{2} - \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{ \cos\frac{(1+\omega-\omega^2)\sqrt{x}}{2} + \cos\frac{(1-\omega+\omega^2)\sqrt{x}}{2} - (1+\cos\sqrt{x}) \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\{1+\cos\sqrt{x}-\cos\omega\sqrt{x}-\cos\omega^2\sqrt{x}\} = \frac{1}{4}\left\{ 1 + \sum_0^\infty{}_r \frac{1-\omega^{2r}-(\omega^2)^{2r}}{(2r)!}(-x)^r \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \sum_0^\infty{}_q \frac{2(-x)^{3q+1}}{(6q+2)!} + \sum_0^\infty{}_q \frac{2(-x)^{3q+2}}{(6q+4)!} - \sum_0^\infty{}_q \frac{(-x)^{3q+3}}{(6q+6)!} \right\},$$

waarin namelijk het laatste lid verkregen is doordien de teller in het voorlaatste lid, dat is $1-\omega^r-\omega^{2r}$, telkens zoowel voor $r = 3q+1$ als voor $r = 3q+2$ gelijk wordt aan $1-\omega-\omega^2 = 2$, daarentegen telkens zoowel voor $r = 0$ als voor $r = 3q+3$ gelijk wordt aan $1-1-1 = -1$. De onderlinge vergelijking van het eerste en het laatste lid leert nu dat in dit geval de coëfficiënten b de zeer eenvoudige waarden

$$b_{6q+2} = 1,$$

$$b_{6q+4} = 1,$$

$$b_{6q+6} = \frac{1}{2}$$

hebben, op grond waarvan de algemeene terugloopende betrekking (4'') achtervolgens voor $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$ geeft:

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{6q+3}{6r}B_{6r-1}=-\frac{6q+3}{3},$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{6q+5}{6r+2}B_{6r+1}=\frac{6q+5}{3},$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{6q+7}{6r+4}B_{6r+3}=\frac{1}{2}\,\frac{6q+7}{3}.$$

dat zijn de drie zelfde betrekkingen — van nog eenvoudiger vorm dan de boven op gelijke wijze voor $n=1$ en $n=2$ gevondene — die ik voor $n=3$ voorloopig reeds zonder bewijs mededeelde in het proces-verbaal der vergadering van 30 November 1878 van de afdeeling Natuurkunde der Kon. Akademie van Wetenschappen; aldaar heeft men namelijk slechts de notatiën s door q en t door r te vervangen en, ten einde liever de thans gebezigde reeds door EULER (*de mirabilibus proprietatibus unciarum, etc.* in *Acta Petropolitana* pro 1781, Pars I, pag. 89) ingevoerde en ook naauwer met den vorm der binomiaal-coëfficiënten zelve overeenstemmende notatie aan te houden, telkens de beide binomiaal-aanwijzers met elkander te verwisselen, om de drie evengevonden betrekkingen te voorschijn te doen komen. Zooals aldaar ook werd opgemerkt, kan de eerste dezer betrekkingen volgens $(4''_0)$ weder onder den vorm

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{6q+3}{6r}B_{6r-1}=2q$$

gebragt worden. En overigens moet, zooals ook bij onderlinge vergelijking van de twee gelijkwaardige algemeene betrekkingen $(4')$ en $(4'')$ blijkt, de ter aangehaalde plaats vermelde deeling van de tweede en de derde bovenstaande betrekking opvolgend door $6q+5$ en door $6q+7$ in dien zin worden verstaan dat deze deeling in het algemeen slechts kan plaats hebben in algebraïschen vorm, dat is zoolang

men q onbepaald laat; maar werkelijk in geheele getallen slechts dan, wanneer $6q+5$ of $6q+7$ een ondeelbaar getal is.

Eindelijk geeft oplossing volgens ieder der drie betrekkingen, in denzelfden geest als boven eerst in het algemeen en later voor $n=1$ en voor $n=2$ geschied is, de volgende drie onafhankelijke formulen:

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}\binom{6r+3}{3}.B_{6q-1} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & \binom{3}{0} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{9}{0} & \binom{9}{6} & 0 & \vdots & 0 \\ 5 & \binom{15}{0} & \binom{15}{6} & \binom{15}{12} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 2q-1 & \binom{6q-3}{0} & \binom{6q-3}{6} & \binom{6q-3}{12} & \vdots & \binom{6q-3}{6q-6} \\ 2q+1 & \binom{6q+3}{0} & \binom{6q+3}{6} & \binom{6q+3}{12} & \vdots & \binom{6q+3}{6q-6} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & \binom{9}{6} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & \binom{15}{6} & \binom{15}{12} & 0 & \vdots & 0 \\ 3 & \binom{21}{6} & \binom{21}{12} & \binom{21}{18} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ q-1 & \binom{6q-3}{6} & \binom{6q-3}{12} & \binom{6q-3}{18} & \vdots & \binom{6q-3}{6q-4} \\ q & \binom{6q+3}{6} & \binom{6q+3}{12} & \binom{6q+3}{18} & \vdots & \binom{6q+3}{6q-4} \end{vmatrix}$$

$$\prod_{0}^{q}{}_{r}\binom{6r+5}{3}.B_{6q+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 5 & \binom{5}{2} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 11 & \binom{11}{2} & \binom{11}{8} & 0 & \vdots & 0 \\ 17 & \binom{17}{2} & \binom{17}{8} & \binom{17}{14} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 6q-1 & \binom{6q-1}{2} & \binom{6q-1}{8} & \binom{6q-1}{14} & \vdots & \binom{6q-1}{6q-4} \\ 6q+5 & \binom{6q+5}{2} & \binom{6q+5}{8} & \binom{6q+5}{14} & \vdots & \binom{6q+5}{6q-4} \end{vmatrix}$$

$$\text{en} \quad \prod_{0}^{q}{}_{r} \binom{6r+7}{3} . B_{6q+3} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 7 & \binom{7}{4} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 13 & \binom{13}{4} & \binom{13}{10} & 0 & \vdots & 0 \\ 19 & \binom{19}{4} & \binom{19}{10} & \binom{19}{16} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 6q+1 & \binom{6q+1}{4} & \binom{6q+1}{10} & \binom{6q+1}{16} & \vdots & \binom{6q+1}{6q-2} \\ 6q+7 & \binom{6q+7}{4} & \binom{6q+7}{10} & \binom{6q+7}{16} & \vdots & \binom{6q+7}{6q-2} \end{vmatrix},$$

waarvan de eerste eene herleiding van den $(q+1)^{\text{en}}$ graads- tot den q^{den} graads-determinant kon ondergaan op grond van $\binom{6q+3}{0} - (2q+1) = -2(q)$, terwijl daarentegen eene dergelijke herleiding voor de tweede en de derde met behoud van een eenvoudigen vorm niet mogelijk is.

Neemt men $n = 4$ of $\omega^4 - 1 = 0$, zoodat dan $\omega = i$ is en de waarden $p = 0,\ 1,\ 2$ en 3 in aanmerking komen, dan gaat de algemeene vergelijking (1') over in:

$$\cos \frac{\sqrt{x}}{2} \prod_{1}^{3}{}_{k} \sin \frac{\sqrt{i^k x}}{2} = 2 \left(\frac{i}{2}\right)^3 \sum_{0}^{\infty}{}_{q} (-)^q \left\{ + \frac{b_{8q+3}}{(8q+3)!} x^{\frac{8q+3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{b_{8q+5}}{(8q+5)!} x^{\frac{8q+5}{2}} - \frac{b_{8q+7}}{(8q+7)!} x^{\frac{8q+7}{2}} - \frac{b_{8q+9}}{(8q+9)!} x^{\frac{8q+9}{2}} \right\}$$

en levert (4'') de vier volgende terugloopende betrekkingen op:

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{8q+4}{8r}b_{8q-8r+3}\,B_{8r-1}=-\frac{8q+4}{4}b_{8q+3}\,,$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{8q+6}{8r+2}b_{8q-8r+3}\,B_{8r+1}=\frac{8q+6}{4}b_{8q+5}\,,$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{8q+8}{8r+4}b_{8q-8r+3}\,B_{8r+3}=\frac{8q+8}{4}b_{8q+7}\,,$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{r}\binom{8q+10}{8r+6}b_{8q-8r+3}\,B_{8r+5}=\frac{8q+10}{4}b_{8q+9}\,,$$

waarvan de eerste volgens $(4''_0)$ ook onder den vorm:

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}(-)^{r-1}\binom{8q+4}{8r}b_{8q-8r+3}\,B_{8r-1}=2q\,b_{8q+3}$$

kan gebragt worden. Nadat vroeger de algemeene determinanten-oplossingen (5′) en (5″) zijn medegedeeld, en nadat de toepassing van deze laatste op de gevallen $n=1$, $n=2$, $n=3$ min of meer uitvoerig is besproken, schijnt het thans minder noodig deze toepassing voor $n=4$ of voor de nog volgende gevallen $n=5$ en $n=6$ weder te herhalen, zoodat voor deze drie gevallen de overeenkomstige determinanten-formulen kortheidshalve niet zullen worden uitgeschreven.

Wat overigens de berekening der getallenwaarden van de tegenwoordige coëfficiënten b betreft, is men, nu de berekening voor $n=2$ is voorafgegaan, thans in de gelegenheid de verdubbelingsformule (12) toe te passen, waarin men op grond van de bij $n=2$ voor b_{4q+1} en b_{4q+3} gevonden waarden slechts heeft te substitueren $b'_{(2r+1)\frac{n}{2}-1}=b'_{4r+1}=\frac{1}{2^{2r+1}}$ en, hetzij p even of oneven is, $b'_{(4q-2r+1)\frac{n}{2}+2p-1}=$ $=b'_{8q-4r+2p+1}=\frac{1}{2^{4q-2r+p+1}}$, om dadelijk te vinden:

$$+3 = \left\{ \begin{matrix} (p=0 \text{ tot } 2)+ \\ (p=3)\ - \end{matrix} \right\} \frac{1}{2^{4q+p}} \sum_{0}^{r \leqq 2q+\frac{p}{2}} (-)^{q-r} \binom{8q+2p+3}{4r+2} \ldots\ldots (12 \text{ voor } n=4)$$

Evenwel, naarmate q grooter wordt, gaat het gebruik van deze formule uithoofde van het toenemend aantal termen in het tweede lid met meer bezwaren gepaard, en het schijnt dus wel de moeite waard te trachten de formule met het oog hierop op geschikte wijze te vervormen.

Ten einde eene dergelijke vervorming eens en vooral dienstbaar te kunnen maken voor al zoodanige gevallen waarin, zooals thans voor $n=4$ plaats heeft en zooals weldra ook voor $n=6$ zal blijken, in de formule (12) het product der beide coëfficiënten b' onafhankelijk is van den rangwijzer r en dus vóór het Σ-teeken kan worden gebragt, zal die vervorming thans voor willekeurige even n, daarbij ter bekorting de basis van den binomiaal-coëfficiënt in (12) tijdelijk voorstellende door $s=(2q+1)n+2p-1$, verrigt worden ten aanzien van $\sum_{0}^{r \leqq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}} (-)^{q-r} \binom{s}{(2r+1)\frac{n}{2}}$. Dit gelukt door in $\sum_{0}^{k} \left(1+\omega^{\frac{4k+1}{2}}\right)^{s} = \sum_{0}^{k} \left(1+e^{\frac{(4k+1)\pi i}{n}}\right)^{s}$, zijnde wegens $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eene identiteit, het eerste lid volgens het binomium, het tweede lid daarentegen goniometrisch te ontwikkelen. Het eerste lid wordt dan achtervolgens gelijk aan

$$\sum_{0}^{s} \left\{ \binom{s}{t} \omega^{\frac{(4k+1)t}{2}} \right\} = \sum_{0}^{s} \left\{ \binom{s}{t} \omega^{\frac{t}{2}} \sum_{0}^{k=\frac{n}{2}-1} \omega^{2kt} \right\} = \sum_{0}^{s} \binom{s}{t} \cdot \omega^{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1-\omega^{nt}}{1-\omega^{2t}} =$$

$$= \frac{n}{2} \left\{ \sum_{0}^{r \leqq \frac{s}{n}} (-)^{r} \binom{s}{2r \cdot \frac{n}{2}} + i \sum_{0}^{r \leqq \frac{s}{n}-\frac{1}{2}} (-)^{r} \binom{s}{(2r+1)\frac{n}{2}} \right\},$$

waarin namelijk deze laatste waarde gevonden werd doordien

in de voorlaatste de breuk $\frac{1-\omega^{nt}}{1-\omega^{2t}}$ wegens $\omega^n = 1$ voor iedere t gelijk nul is, behalve alleen wanneer $2t$ zelf een veelvoud van n is, als wanneer die breuk als som van $\frac{n}{2}$ alsdan gelijke termen ω^{2kt} of 1 overgaat in $\frac{n}{2}$, terwijl men dan tegelijkertijd

voor $2t \left\{\begin{matrix} = 2r \,.\, n \\ = (2r+1)n \end{matrix}\right\} \leqq 2s$ heeft $\omega^{\frac{t}{2}} \left\{\begin{matrix} = \left(\omega^{\frac{n}{2}}\right)^r = (-1)^r . \\ = \left(\omega^{\frac{n}{2}}\right)^{r+\frac{1}{2}} = (-)^r i . \end{matrix}\right.$

Voor het tweede lid der identiteit kan men schrijven:

$$\sum_0^{\frac{n}{2}-1} {}_k \, e^{\frac{(4k+1)s\pi i}{2n}} \left(e^{-\frac{(4k+1)\pi i}{2n}} + e^{\frac{(4k+1)\pi i}{2n}} \right)^s =$$

$$= \sum_0^{\frac{n}{2}-1} {}_k \left\{ cos \frac{(4k+1)s\pi}{2n} + i \, sin \frac{(4k+1)s\pi}{2n} \right\} \left(2 \, cos \frac{(4k+1)\pi}{2n} \right)^s .$$

Stelt men nu voor het tegenwoordige doel de coëfficiënten van i in de voor ieder lid verkregen ontwikkeling aan elkander gelijk, neemt men daarbij, $s = (2q+1)n + 2p - 1$ weder substituerende, in aanmerking dat $sin \frac{(4k+1)s\pi}{2n} =$

$$= sin \left\{ 2k(2q+1)\pi + (2q+1)\frac{\pi}{2} + \frac{(4k+1)(2p-1)\pi}{2n} \right\} =$$

$= (-)^q \, cos \frac{(4k+1)(2p-1)\pi}{2n}$ is, voert men ter bekorting de notatie

$$\theta_k = 2 \, cos \frac{(4k+1)\pi}{2n}$$

in en vermenigvuldigt men tegelijkertijd met $(-1)^q$, dan is hiermede bewezen dat

$$\frac{n}{2}\sum_{0}^{\leqq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}+\frac{n-2}{2n}}{}^{r}(-)^{q-r}\binom{(2q+1)n+2p-1}{(2r+1)\frac{n}{2}}=$$

$$=\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1}{}^{k}\cdot\left(cos\frac{(4k+1)(2p-1)\pi}{2n}\right)\theta_k^{(2q+1)n+2p-1}\ldots\ldots(13)$$

is, waarin, omdat $cos\left(n\ Boog\ cos\frac{\theta_k}{2}\right)=cos\frac{(4k+1)\pi}{2}=0$ is, $\theta^2_{k(k=0,1,2,\text{enz.},\frac{n}{2}-1)}$ niet anders zijn dan de wortels van de $\left(\frac{n}{2}\right)^e$ magtsvergelijking in θ^2 die men verkrijgt door de bekende uitdrukking voor den cosinus van het (hier even) n-voud van een boog in functie der magten van den cosinus van den boog zelf gelijk nul te stellen, namelijk (zie ook de Aanteekening aan het slot):

$$\theta^n+n\sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}^{l}\frac{(-)^l}{l}\binom{n-l-1}{l-1}\theta^{n-2l}=0,\ \ldots\ (14)$$

terwijl overigens bij het gebruik van (13) wél moet worden gelet op het onderscheid tusschen de in haar eerste lid voorkomende bovengrens $r\leqq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}+\frac{n-2}{2n}$ en de bovengrens $r\leqq 2q+\frac{p}{\frac{1}{2}n}$ die men in (12) werkelijk noodig heeft. Dit onderscheid namelijk heeft tengevolge dat, terwijl zoolang $0\leqq p<\frac{n+2}{4}$ genomen wordt beide bovengrenzen in geheele getallen zamenvallen in $2q$, zij daarentegen voor $\frac{n+2}{4}\leqq p<\frac{n}{2}$ zijn $2q+1$ en $2q$, zoodat dan de Σ van

(13) gelijk is aan die met bovengrens $r \leqq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n} = 2q$ vermeerderd met den term voor $r = 2q + 1$, dat is met $(-)^{q+1} \begin{pmatrix} (2q+1)n + 2p-1 \\ (4q+3)\frac{n}{2} \end{pmatrix}$; en wederom dat, terwijl zoolang $\frac{n}{2} \leqq p < \frac{3n+2}{4}$ is beide bovengrenzen in geheele getallen zamenvallen in $2q + 1$, zij daarentegen voor $\frac{3n+2}{4} \leqq p \leqq n-1$ zijn $2q+2$ en $2q+1$, zoodat dan de Σ van (13) gelijk is aan die met bovengrens $r \leqq 2q + \frac{p}{\frac{1}{2}n} = 2q+1$ vermeerderd met den term voor $r = 2q + 2$, dat is met $(-)^{q} \begin{pmatrix} (2q+1)n + 2p-1 \\ (4q+5)\frac{n}{2} \end{pmatrix}$. Dit waar noodig in acht nemende, is overigens het voordeel dat althans bij groote waarden van q het gebruik van (13) voor de berekening der coëfficiënten b oplevert hierin gelegen dat, terwijl (12) eene sommatie van $2q + 1$ of van $2q + 2$ termen zou vorderen, deze sommatie volgens (13) door eene van slechts $\frac{n}{2}$ termen wordt vervangen. Ook zou men nog wel in het algemeen in het tweede lid van (13) door middel van de zoo even herinnerde uitdrukking voor den cosinus van het (thans oneven) $(2p-1)$-voud van een boog den factor $cos\,(2p-1)\frac{(4k+1)\pi}{2n}$ volgens de magten van θ_k, en daarmede dit tweede lid zelf volgens de sommen van gelijknamige magten van alle $\frac{n}{2}$ wortels θ_k^2 van (14) kunnen ontwikkelen; maar deze ontwikkeling, waardoor dit tweede lid, behoudens voor $p = 0$ den vorm $\frac{1}{2}\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} \theta_k^{(2q+1)n}$ en voor

$p=1$ den vorm $\frac{1}{2}\sum_{0}^{\frac{n}{2}-1} \theta_k^{(2q+1)n+2}$, overigens een meer zamengestelden vorm zou aannemen, kan hier te meer achterwege blijven omdat toch slechts de toepassingen op $n=4$ en $n=6$ beoogd worden en in deze beide gevallen andere geschikte herleidingen regtstreeks mogelijk zullen blijken.

Tot zoover dus voor een willekeurigen even periodenaanwijzer n. Thans meer in het bijzonder terugkeerende tot het in behandeling zijnde geval van $n=4$, als wanneer voor $p=0$, 1, 2 en 3 de bovengrenzen in (12 voor $n=4$) en in het eerste lid van (13) steeds dezelfde zijn, heeft de substitutie van deze laatste formule in de eerste tot uitkomst:

$$b_{8q+2p+3} = \begin{Bmatrix} (p=0 \text{ tot } 2)+ \\ (p=3) \quad - \end{Bmatrix} \frac{1}{2^{4q+p+1}} \left\{ \left(\cos \frac{(2p-1)\pi}{8} \right) \theta_0^{8q+2p+3} + \right.$$
$$\left. + \left(\cos \frac{5(2p-1)\pi}{8} \right) \theta_1^{8q+2p+3} \right\},$$

waarin de vierkanten van

$$\theta_0 = 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{(2+\sqrt{2})}$$

en $\theta_1 = 2\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{2}\left(1+\cos\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{(2-\sqrt{2})}$

de beide wortels zijn van

$$\theta^4 - 4\theta^2 + 2 = 0, \ldots\ldots \text{ (14 voor } n=4)$$

terwijl in het tweede lid de beide cosinussen voor $p=0$ tot waarde hebben $\frac{\theta_0}{2}$ en $\frac{\theta_1}{2}$; voor $p=1$, $\frac{\theta_0}{2}$ en $\frac{\theta_1}{2}$; voor $p=2$, $-\frac{\theta_1}{2}$ en $\frac{\theta_0}{2}$; voor $p=3$, $\frac{\theta_1}{2}$ en $-\frac{\theta_0}{2}$; zoodat men, deze waarden substituerende en lettende op $\theta_0\theta_1 = -\sqrt{2}$, zou hebben ter onafhankelijke berekening van b de vier eenvoudige formulen

$$b_{8q+3} = \frac{\theta_0^{8q+4} + \theta_1^{8q+4}}{2^{4q+2}}, \qquad b_{8q+5} = \frac{\theta_0^{8q+6} + \theta_1^{8q+6}}{2^{4q+3}},$$

$$b_{8q+7} = \frac{\left(\theta_0^{8q+6} - \theta_1^{8q+6}\right)\sqrt{2}}{2^{4q+4}}, \quad b_{8q+9} = \frac{\left(\theta_0^{8q+8} - \theta_1^{8q+8}\right)\sqrt{2}}{2^{4q+5}}.$$

Nog gemakkelijker evenwel dan deze formulen zullen voor de getallen-berekening de navolgende terugloopende bevonden worden. Voert men namelijk, ten einde daarbij met zoo klein mogelijke geheele getallen te doen te hebben, naarmate de aanwijzer even of oneven is de notatiën

$$\mu_{2t} = \frac{\theta_0^{4t} + \theta_1^{4t}}{2^{t+1}} \text{ en } \mu_{2t+1} = \frac{\theta_0^{4t+2} + \theta_1^{4t+2}}{2^{t+2}}$$

in, dan vindt men vooreerst, door (14 voor $n = 4$) na vermenigvuldiging met θ^{4t-4} of ook met θ^{4t-2} afzonderlijk toe te passen op θ_0 en op θ_1 beiden en telkens de som der beide uitkomsten te nemen, dat deze coëfficiënten μ onderling zamenhangen volgens de twee beurtelings te gebruiken terugloopende betrekkingen

$$\mu_{2t} = 4\,\mu_{2t-1} - \mu_{2t-2}$$

$$\text{en} \quad \mu_{2t+1} = 2\,\mu_{2t} \quad - \mu_{2t-1},$$

die gevoegd bij $\mu_0 = \frac{\theta_0^0 + \theta_1^0}{2} = 1$ en $\mu_1 = \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2}{2^2} = 1$ niet alleen leeren dat al deze coëfficiënten geheele getallen zijn, maar ook in staat stellen ze onmiddellijk uit elkander neder te schrijven, terwijl deze op hunne beurt weder de verlangde coëfficiënten b bepalen door middel van de vier formulen

$$b_{8q+3} = \frac{\mu_{4q+2}}{2^{2q}}, \qquad b_{8q+5} = \frac{\mu_{4q+3}}{2^{2q}},$$

$$b_{8q+7} = \frac{\mu_{4q+4} - 2\mu_{4q+3}}{2^{2q+1}}, \quad b_{8q+9} = \frac{\mu_{4q+5} - \mu_{4q+4}}{2^{2q+1}},$$

waarvan de derde gevonden is door te letten op $\left(\theta_0^{8q+6}-\theta_1^{8q+6}\right)\sqrt{2}=\theta_0^{8q+6}\left(\theta_0^2-2\right)-\theta_1^{8q+6}\left(2-\theta_1^2\right)=$ $=\left(\theta_0^{8q+8}+\theta_1^{8q+8}\right)-2\left(\theta_0^{8q+6}+\theta_1^{8q+6}\right)$, en evenzoo voor de vierde.

Wil men eindelijk nog terugloopende betrekkingen regtstreeks tusschen de coëfficiënten b zelve hebben, dan leidt men daartoe uit de voorgaande zonder moeite de vier volgende, evenwel van minder eenvoudigen vorm, af, namelijk:

$$2\,b_{8q+7} = 2\,b_{8q+5} - b_{8q+3},$$
$$2\,b_{8q+9} = 2\,b_{8q+7} + b_{8q+5},$$
$$2\,b_{8q+11} = 10\,b_{8q+9} - 3\,b_{8q+7},$$
$$6\,b_{8q+13} = 10\,b_{8q+11} + b_{8q+9},$$

of, wat de laatste betreft, ten einde te doen zien dat ook hier de getallencoëfficiënt 6 in het eerste lid tot slechts 2 is te herleiden, zij het ook dat dan de in het tweede lid optredende coëfficiënten b niet meer de onmiddellijk aan b van het eerste lid voorafgaande blijven,

$$2\,b_{8q+13} = 17\,b_{8q+9} - 5\,b_{8q+7}.$$

Wordt niet verlangd alle coëfficiënten $b_s = b_{(2q+1)n+2p-1} = b_{8q+2p+3}$ in geregelde volgorde uit elkander af te leiden, maar wil men ook deze coëfficiënten, evenals de Bernoulliaansche coëfficiënten zelve tot wier berekening zij moeten dienen, door periodieke terugloopende betrekkingen bepalen en wel volgens vier overeenkomstige door $p = 0,\ 1,\ 2$ en 3 aangeduide groepen, dan treden daarbij wel is waar grootere getallenfactoren op dan in de zoo even voor b_{8q+7}, b_{8q+9}, b_{8q+11} en b_{8q+13} nedergeschreven formulen, maar heeft men daarentegen het voordeel dat nu ééne en dezelfde formule blijkt dienst te kunnen doen in plaats van de onderling verschil-

lende van zoo even. Immers door, de notatie $s = 8q + 2p + 3$ weder invoerende, de boven voor $b_{8q+2p+3}$ gevonden goniometrische formule te schrijven

$$2^{\frac{s-1}{2}} b_s = \left\{ \begin{matrix} (p = 0 \text{ tot } 2) + \\ (p = 3) \; - \end{matrix} \right\} \left\{ \left(cos \frac{(2p-1)\pi}{8} \right) \theta_0^s + \left(cos \frac{5(2p-1)\pi}{8} \right) \theta_1^s \right\},$$

door hierin voor onveranderde p, maar voor $q-1$ en $q-2$ in plaats van q, s achtervolgens te vervangen door $s-8$ en door $s-16$, en door er op bedacht te zijn dat (14 voor $n = 4$) geeft voor θ^4 als onbekende de vergelijking $(\theta^4 + 2)^2 = 16\theta^4$ en dus voor θ^8 de vergelijking $(\theta^8 + 4)^2 = 144\,\theta^8$, zoodat voor willekeurige s steeds de betrekking $\theta^s = 136\,\theta^{s-8} - 16\,\theta^{s-16}$ geldt voor ieder der wortels θ_0 en θ_1 op zich zelf, vindt men dadelijk, onverschillig voor welke der vier waarden van p, de bedoelde algemeene periodieke terugloopende betrekking

$$16\,b_s = 136\,b_{s-8} - b_{s-16},$$

die dus meer in het bijzonder zou kunnen dienen wanneer voor een of ander doel slechts ééne der vier groepen van Bernoulliaansche coëfficiënten $B_{8q+2p-1}$ mogt vereischt worden, als wanneer behalve de steeds noodige b_{8q+3} slechts de overeenkomstige $b_{8q+2p+3}$ bekend zouden behoeven te zijn.

Met deze betrekking tusschen de coëfficiënten b is overigens de algemeene betrekking $\mu_t = 34\,\mu_{t-4} - \mu_{t-8}$ tusschen de coëfficiënten μ gelijkwaardig.

Ten slotte de opmerking dat men deze coëfficiënten μ, in plaats van ze hetzij volgens de evengenoemde betrekking of volgens de twee voor elke drie opvolgende μ boven medegedeelde betrekkingen uit elkander te berekenen, nog wel zoo eenvoudig kan vinden door op grond van de twee laatstbedoelde betrekkingen zelve als nieuwe coëfficiënten in te voeren hetzij het stelsel

$$\nu_{2t-1} = \mu_{2t} - 2\mu_{2t-1} = 2\mu_{2t-1} - \mu_{2t-2} = \frac{(\theta_0^{4t-2} - \theta_1^{4t-2})\sqrt{2}}{2^{t+1}}$$

of liever nog het stelsel

$$\nu_{2t} = \mu_{2t+1} - \mu_{2t} = \mu_{2t} - \mu_{2t-1} = \frac{(\theta_0^{4t} - \theta_1^{4t})\sqrt{2}}{2^{t+2}},$$

welke stelsels dan ieder voor zich wegens $(\theta^4 + 2)^2 = 16\theta^4$ of $\theta^t = 12\theta^{t-4} - 4\theta^{t-8}$ gemakkelijk te berekenen zijn volgens de zoowel voor oneven als voor even t geldende terugloopende betrekking

$$\nu_t = 6\nu_{t-2} - \nu_{t-4}$$

in verband met de aanvangstermen ($\nu_1 = 1$, $\nu_3 = 7$) of ($\nu_0 = 0$, $\nu_2 = 2$). Is dus eenmaal $\mu_0 = 1$ bekend, dan volgen hieruit, zonder het stelsel ν_{2t-1} noodig te hebben, alle verdere μ dadelijk door iederen term van het stelsel ν_{2t} tweemaal achtereen als verschil van twee opvolgende μ te gebruiken. Of wil men thans, zonder tusschenkomst van de coëfficiënten μ, onmiddellijk tot de coëfficiënten b zelve besluiten, dan heeft men daartoe

$$b_{8q+3} = \frac{2\nu_{4q+2} - \nu_{4q+1}}{2^{2q}}, \quad b_{8q+5} = \frac{\nu_{4q+4} - \nu_{4q+3}}{2^{2q}},$$

$$b_{8q+7} = \frac{\nu_{4q+3}}{2^{2q+1}}, \qquad b_{8q+9} = \frac{\nu_{4q+4}}{2^{2q+1}}.$$

Tusschen drie opvolgende coëfficiënten μ van oneven rangorde, en evenzoo voor even rangorde, bestaat overigens dezelfde betrekking als voor de coëfficiënten ν, namelijk $\mu_t = 6\mu_{t-2} - \mu_{t-4}$; en ook deze zou dus kunnen dienen ter berekening van de opvolgende μ_{2t-1}, waartusschen dan μ_{2t} telkens als gemiddelde is in te vullen.

In het geval van $n = 5$ of $\omega^5 - 1 = 0$, waarvoor de waarden $p = 0$, 1, 2, 3 en 4 in aanmerking komen, geeft de algemeene vergelijking (1')

$$2\left(\frac{i}{2}\right)^4\sum_0^\infty{}_q(-)^q\Big\{+\frac{b_{10q+4}}{(10q+4)!}x^{5q+2}-\frac{b_{10q+6}}{(10q+6)!}x^{5q+3}-$$

$$-\frac{b_{10q+8}}{(10q+8)!}x^{5q+4}-\frac{b_{10q+10}}{(10q+10)!}x^{5q+5}-\frac{b_{10q+12}}{(10q+12)!}x^{5q+6}\Big\}=$$

$$=\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\prod_1^4{}_k\sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2}=\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\prod_1^4{}_k\sin\frac{\omega^k\sqrt{x}}{2},$$

waarin namelijk het laatste lid kon worden bijgeschreven op grond van de boven, onmiddellijk vóór de formule $(8'_a)$, voor het geval van willekeurige oneven n gemaakte opmerking; en levert dan $(4'')$ de vijf volgende terugloopende betrekkingen op:

$$\sum_0^q{}_r(-)^r\binom{10q+5}{10r}b_{10q-10r+4}B_{10r-1}=-\frac{10q+5}{5}b_{10q+4},$$

$$\sum_0^q{}_r(-)^r\binom{10q+7}{10r+2}b_{10q-10r+4}B_{10r+1}=\frac{10q+7}{5}b_{10q+6},$$

$$\sum_0^q{}_r(-)^r\binom{10q+9}{10r+4}b_{10q-10r+4}B_{10r+3}=\frac{10q+9}{5}b_{10q+8},$$

$$\sum_0^q{}_r(-)^r\binom{10q+11}{10r+6}b_{10q-10r+4}B_{10r+5}=\frac{10q+11}{5}b_{10q+10},$$

$$\sum_0^q{}_r(-)^r\binom{10q+13}{10r+8}b_{10q-10r+4}B_{10r+7}=\frac{10q+13}{5}b_{10q+12},$$

waarvan de eerste volgens $(4''_0)$ ook te vervangen is door

$$\sum_1^q{}_r(-)^{r-1}\binom{10q+5}{10r}b_{10q-10r+4}B_{10r-1}=2q\,b_{10q+4}.$$

Wat nu de berekening van de hierin voorkomende getallen-coëfficiënten b betreft, daartoe kan men de zoo even herinnerde, voor oneven n geldende, formule $(8'_a)$, dat is thans

$$2^4\cos\frac{\sqrt{x}}{2}\prod_1^4{}_k\sin\frac{\omega^k\sqrt{x}}{2}=1-\sum\cos x_1+\sum\cos(x_1+x_2)=$$

$= 1 - C_1 + C_2$, gebruiken in verband met de herleidingsformulen (9_a) en (9_b) die wegens $C_0 = 1$ en $S_0 = 0$ achtervolgens geven: $C_1 = c_1\,C_0 - s_1\,S_0 = c_1$, $S_1 = c_1\,S_0 + s_1\,C_0 = s_1$ en $2\,C_2 = (c_1\,C_1 - s_1 S_1) - (c_2\,C_0 - s_2\,S_0) = ({c_1}^2 - {s_1}^2) - c_2$, en in verband ook met de formulen (10_a) en (10_b), gevende

$$c_1 = -2\cos\sqrt{x} + \sum_0^4{}^k \cos\omega^k\sqrt{x}\,,\quad s_1 = -2\sin\sqrt{x} + \sum_0^4{}^k \sin\omega^k\sqrt{x}\,,$$

(zoodat de twee eerste termen in ${c_1}^2 - {s_1}^2$ zijn te vereenigen tot $4(\cos^2\sqrt{x} - \sin^2\sqrt{x}) = 4\cos 2\sqrt{x}$) en $c_2 = \sum_0^4{}^k \cos 2\omega^k\sqrt{x}$, terwijl tevens te letten is op hetgeen (11_a) geeft voor $q = 1$ en $q = 2$, en (11_b) voor $q = 1$. Zoodoende en met 2^3 vermenigvuldigende, vindt men achtervolgens:

$$\sum_0^\infty{}^q (-)^q \left\{ \sum_0^4{}^p \left\{ \begin{matrix} (p=0) \\ (p=1\text{ tot }4) \end{matrix} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \frac{b_{10q+2p+4}}{(10q+2p+4)!}\, x^{5q+p+2} \right\} =$$

$$= 2^3 \cos\frac{\sqrt{x}}{2} \prod_1^4{}^k \sin\frac{\omega^k\sqrt{x}}{2} = \frac{1 - C_1 + C_2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{c_1}{2} + \frac{{c_1}^2 - {s_1}^2}{4} - \frac{c_2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} + (\cos\sqrt{x} + \cos 2\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{2} + \cos\sqrt{x}\right) \sum_0^4{}^k \cos\omega^k\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}\,.\sum_0^4{}^k \sin\omega^k\sqrt{x} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\sum_0^4{}^k \cos\omega^k\sqrt{x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_0^4{}^k \sin\omega^k\sqrt{x}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_0^4{}^k \cos 2\,\omega^k\sqrt{x} =$$

$$\frac{1}{2} + \left[(1+1) - \frac{1+2^2}{2!}x + \sum_0^\infty{}^q (-)^q \left\{ \sum_0^4{}^p \left\{ \begin{matrix} (p=0,2,4)+ \\ (p=1,3)- \end{matrix} \right\} \frac{1+2^{10q+2p+4}}{(10q+2p+4)!}\, x^{5q+p+2} \right\}\right] -$$

$$- 5\left[\frac{3}{2} - \frac{x}{2!} + \sum_0^\infty{}^{q-r} (-)^{q-r} \left\{ \sum_0^4{}^p \left\{ \begin{matrix} (p=0,2,4)+ \\ (p=1,3)- \end{matrix} \right\} \frac{x^{5q-5r+p+2}}{(10q-10r+2p+4)!} \right\}\right]\left[\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{x^{5r}}{(10r)!}\right] +$$

$$+ 5\left[\sum_0^\infty{}^{q-r} (-)^{q-r} \left\{ \sum_0^4{}^p \left\{ \begin{matrix} (p=0,2,4)- \\ (p=1,3)+ \end{matrix} \right\} \frac{x^{\frac{10q-10r+2p-1}{2}}}{(10q-10r+2p-1)!} \right\}\right]\left[\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{x^{\frac{10r+5}{2}}}{(10r+5)!}\right] +$$

$$+ \frac{25}{4}\left\{\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{x^{5r}}{(10r)!}\right\}^2 - \frac{25}{4}\left\{\sum_0^\infty{}^r (-)^r \frac{x^{\frac{10r+5}{2}}}{(10r+5)!}\right\}^2 - \frac{5}{4}\left\{1 - \sum_0^\infty{}^q (-)^q \frac{2^{10q+10}}{(10q+10)!}\, x^{5q+5}\right\},$$

waarin de algemeene term in den eersten factor van den vierden term van het laatste lid onder den eenigzins ongewonen vorm $\frac{x^{\frac{10q-10r+2p-1}{2}}}{(10q-10r+2p-1)!}$ geschreven is alleen met het doel om, evenals bij den derden term van dat lid het geval is, bij vermenigvuldiging met den tweeden factor juist den in het eerste lid voorkomenden algemeenen term in x^{5q+p+2} te voorschijn te doen komen; zijnde in verband hiermede nog op te merken dat in den eerstgenoemden algemeenen term de allereerste substitutie $(q-r=0,\ p=0)$, waardoor die term zou worden $\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-1)!}$, niet mag worden toegelaten en de substitutie dus hier bij uitzondering eerst mag beginnen met $(q-r=0,\ p=1)$. Werkt men nu het laatste lid verder uit, dan vindt men gemakkelijk, vooreerst dat daarin werkelijk, zooals het eerste lid laat verwachten, zoowel de term zonder x als de term in x zelf komen te ontbreken; ten tweede dat, voor een oogenblik den bij $p=3$ behoorenden term in x^{5q+5}, die op andere wijze dan alle overigen is zamengesteld, daarlatende, daarentegen voor $p=0,\ 1,\ 2$ en 4 komt door gelijkstelling der coëfficiënten van den algemeenen term in x^{5q+p+2} na vermenigvuldiging met $(-)^q\,(10q+2p+4)!$ de formule

$$\left\{\begin{matrix}(p=0)\ +\\ (p=1,2,4)-\end{matrix}\right\} b_{10q+2p+4} = \left\{\begin{matrix}(p=0,2,4)+\\ (p=1)\ -\end{matrix}\right\} \left\{1 + 2^{10q+2p+4} - \right.$$

$$\left. - 5\sum_{0}^{<q+\frac{2p+4}{10}}{}_r \binom{10q+2p+4}{10r} - 5\sum_{0}^{<q+\frac{2p-1}{10}}{}_r \binom{10q+2p+4}{10r+5}\right\},$$

of, de beide laatste termen onder één gemeenschappelijken vorm zamenvattende,

$$b_{10q+2p+4} = \left\{\begin{matrix}(p=0,1)+\\ (p=2,4)-\end{matrix}\right\} \left\{1 + 2^{10q+2p+4} - 5\sum_{0}^{<2q+\frac{2p+4}{5}}{}_r \binom{10q+2p+4}{5r}\right\}; \ldots (1$$

ten derde dat voor $p = 3$ evenzoo komt door gelijkstelling der coëfficiënten van den evenbedoelden uitzonderingsterm in x^{5q+5} de formule

$$b_{10q+10} = -(1 + 2^{10q+10}) + \frac{15}{2} + 5\sum_0^q \binom{10q+10}{10r} +$$

$$+ 5\sum_0^q \binom{10q+10}{10r+5} - \frac{25}{4}\sum_0^{q+1} \binom{10q+10}{10r} - \frac{25}{4}\sum_0^q \binom{10q+10}{10r+5} + \frac{5}{4}\cdot 2^{10q+10},$$

of, omdat hier in het tweede lid de derde term $5\sum_0^q \binom{10q+10}{10r} =$

$= 5\sum_0^{q+1} \binom{10q+10}{10r} - 5$ is, na herleiding

$$b_{10q+10} = -\frac{1}{4}\left\{6 + 2^{10q+10} - 5\sum_0^{2q+2} \binom{10q+10}{5r}\right\} \ldots (15_b)$$

En hiermede zijn dus de bij de vijf verschillende waarden van p behoorende coëfficiënten b gevonden. Evenwel, om dezelfde reden als boven voor het geval van $n = 4$ zullen wij het ook thans niet bij de gevonden vormen laten, maar weder in denzelfden geest eene goniometrische herleiding uitvoeren. Daarbij althans aanvankelijk de zaak wederom voor een willekeurigen, mits nu oneven, perioden-aanwijzer n opvattende en als vroeger de notatie $s = (2q+1)n + 2p - 1$ aannemende, is het thans dienstig van de identiteit $\sum_0^{n-1} (1+\omega^k)^s =$

$= \sum_0^{n-1} \left(1 + e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^s$ uit te gaan. Hierin laat zich het eerste lid achtervolgens herleiden tot:

$$\sum_0^{n-1} \left\{\sum_0^s \binom{s}{t} \omega^{kt}\right\} = \sum_0^s \left\{\binom{s}{t} \sum_0^{n-1} \omega^{kt}\right\} = \sum_0^s \binom{s}{t} \cdot \frac{1-\omega^{nt}}{1-\omega^t} = n \sum_0^{\leqq \frac{s}{n}} \binom{s}{rn},$$

zijnde namelijk de laatste waarde gevonden doordien wegens $\omega^n = 1$ de breuk $\frac{1-\omega^{nt}}{1-\omega^t}$ voor iedere waarde van t gelijk nul is, behalve alleen voor $t = rn$, als wanneer die breuk of $\sum_0^{n-1}{}_k \omega^{kt} = \sum_1^{n-1}{}_k 1^{kr} = n$ wordt. Het tweede lid der identiteit neemt, indien men den voor $k = 0$ komenden eersten term 2^s vooropstelt en verder telkens ieder paar bij k en $n-k$ behoorende termen bijeenvoegt, daarbij lettende op $e^{\frac{2(n-k)\pi i}{n}} = e^{-\frac{2k\pi i}{n}}$, den vorm:

$$2^s + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k \left\{\left(1 + e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^s + \left(1 + e^{-\frac{2k\pi i}{n}}\right)^s\right\} =$$

$$= 2^s + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k \left(e^{\frac{ks\pi i}{n}} + e^{-\frac{ks\pi i}{n}}\right)\left(e^{-\frac{k\pi i}{n}} + e^{\frac{k\pi i}{n}}\right)^s =$$

$$= 2^s + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k \left(2\cos\frac{ks\pi}{n}\right)\left(2\cos\frac{k\pi}{n}\right)^s$$ aan. Voert men nu weder de waarde van s voluit in en neemt men in aanmerking dat daardoor

$$2\cos\frac{ks\pi}{n} = 2\cos\left\{k(2q+1)\pi + \frac{k(2p-1)\pi}{n}\right\} = (-)^k . 2\cos\frac{k(2p-1)\pi}{n}$$

wordt, dan is alzoo bewezen dat voor oneven n steeds

$$n \sum_0^{\leqq \frac{2q+1+2p-1}{n}}{}_r \binom{(2q+1)n + 2p-1}{rn} = 2^{(2q+1)n+2p-1} +$$

$$+ \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k (-)^k \left(2\cos\frac{k(2p-1)\pi}{n}\right)\left(2\cos\frac{k\pi}{n}\right)^{(2q+1)n+2p-1} \quad ..(16)$$

is, en dan ziet men reeds in, door het verschil tusschen het eerste lid en den eersten term van het tweede lid te vergelijken met de tweede leden der evengevonden formulen (15_s)

en (15_5), dat indien men, (hetgeen evenwel voor oneven $n > 5$ niet meer het geval is), steeds met formulen van geen anderen dan dezen zelfden vorm te maken had, op deze wijze de mogelijkheid zou bestaan om de coëfficiënten b, volgens die formulen bestaande uit een met q en p steeds toenemend aantal termen, te berekenen als algebraïsche sommen van niet meer dan $1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$ termen. Alvorens nu voor $n = 5$ werkelijk tot deze berekening over te gaan, eerst nog eene aanwijzing hoe de $\frac{n-1}{2}$ daarbij voorkomende goniometrische factoren $2\cos\frac{k\pi}{n}$ in het algemeen te bepalen. Die bepaling schijnt het meest geschikt te kunnen plaats hebben door ze terug te brengen tot die van de $\frac{n-1}{2}$ door

$$\theta_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

voor te stellen dubbele cosinussen van de beneden π blijvende oneven veelvouden van den boog $\frac{\pi}{n}$ voor $k = 0, 1, 2,$ enz., $\frac{n-3}{2}$, en wél bij voorkeur oneven veelvouden ten einde, — hetgeen bij aanname van even veelvouden niet het geval zou zijn — voor de straks in te voeren coëfficiënten μ geene andere dan positieve waarden te verkrijgen. En werkelijk is het niet moeijelijk de $\left(\frac{n-1}{2}\right)^e$ magtsvergelijking neder te schrijven die al deze θ_k tot wortels heeft: daartoe is de opmerking voldoende dat uit $\frac{n+1}{2}\cdot\frac{(2k+1)\pi}{n} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{(2k+1)\pi}{n} =$ $=(2k+1)\pi$ volgt $\sin\frac{n+1}{2}\cdot\frac{(2k+1)\pi}{n} - \sin\frac{n-1}{2}\cdot\frac{(2k+1)\pi}{n} = 0$, zoodat men door de bekende uitdrukking voor den sinus van het veelvoud van een boog als product van den sinus van den boog zelf en van eene functie der magten van zijn cosinus (zie ook de Aanteekening aan het slot) toe te passen

op het $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-voud en op het $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-voud, dadelijk voor die vergelijking heeft

$$\sum_{0}^{l}{}^{\frac{n-1}{4}\text{of}\frac{n-3}{4}}(-)^l\binom{\frac{1}{2}(n-1)-l}{l}\theta^{\frac{n-1}{2}-2l} - \sum_{0}^{l}{}^{\frac{n-5}{4}\text{of}\frac{n-3}{4}}(-)^l\binom{\frac{1}{2}(n-3)-l}{l}\theta^{\frac{n-3}{2}-2l} = 0, \ldots$$

zijnde hierin de ongelijke eerste of de gelijke tweede bovengrenzen te nemen naarmate $\frac{n+1}{2}$ oneven of even is. In het voorbijgaan zij nog opgemerkt dat wegens $\theta_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} -$

$$= -2\cos\frac{(n-2k-1)\pi}{n} = -\left(e^{\frac{(n-2k-1)\pi i}{n}} + e^{-\frac{(n-2k-1)\pi i}{n}}\right) =$$

$$= -\left(\omega^{\frac{n-2k-1}{2}} + \omega^{\frac{n+2k+1}{2}}\right)$$ deze vergelijking behoudens omkeering der teekens van alle wortels geene andere is dan die men op de bekende wijze door $\theta = \omega + \frac{1}{\omega}$ te stellen zou verkrijgen als de herleide van de wederkeerige vergelijking $\frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} =$

$$= \sum_{n-1}^{0}{}^{l}\omega^l = 0;$$ terwijl bovendien na diezelfde omkeering der teekens het met den eersten-magtsfactor $\theta - 2$ vermenigvuldigde vierkant der vergelijking zou blijken naar behooren geene andere te zijn dan de n^{de} magtsvergelijking in θ die men, — indien het niet zaak geweest was de hier mogelijke verlaging tot den $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{en}}$ graad dadelijk te bewerkstelligen, — uit $\cos\left(n\,\text{Boog}\cos\frac{\theta_k}{2}\right) = \cos(n-2k-1)\pi = 1$ had kunnen opschrijven in denzelfden trant als (14) hierboven. En wat nu betreft de wijze waarop de $\frac{n-1}{2}$ te bepa-

len waarden van $2\cos\frac{k\pi}{n}$ afhangen van de $\frac{n-1}{2}$ wortels van (16), heeft men dadelijk:

r oneven k: $\quad 2\cos\frac{k\pi}{n} = 2\cos\frac{\left(2.\frac{k-1}{2}+1\right)\pi}{n} = \theta_{\frac{k-1}{2}}$

voor even k: $\quad 2\cos\frac{k\pi}{n} = -2\cos\frac{\left(2.\frac{n-k-1}{2}+1\right)\pi}{n} = -\theta_{\frac{n-k-1}{2}}$.

Na deze meer algemeene beschouwingen voor willekeurige oneven n thans terugkeerende tot het in behandeling zijnde geval $n=5$, verkrijgt men door van (16) voor dat geval gebruik te maken ter goniometrische vervorming van (15_a) en (15_b), daarbij lettende dat voor $k=1$ en voor $k=2$ volgens het even gevondene $2\cos\frac{\pi}{5}=\theta_0$ en $2\cos\frac{2\pi}{5}=-\theta_1$ is, de beide formulen:

r $p=0,\ 1,\ 2$ en 4: $b_{10q+2p+4} =$

$$=\left\{\begin{matrix}(p=0,1)+\\(p=2,4)-\end{matrix}\right\}\left\{1+\left(2\cos\frac{(2p-1)\pi}{5}\right)\theta_0^{10q+2p+4}-\left(2\cos\frac{2(2p-1)\pi}{5}\right)\theta_1^{10q+2p+4}\right\}$$

voor $p=3$: $\quad b_{10q+10} = -\frac{1}{4}\left\{6-2\,\theta_0^{10q+10}-2\,\theta_1^{10q+10}\right\}$,

rin

$$=2\cos\frac{\pi}{5}=\sqrt{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{\left(2+\text{koorde}\frac{2\pi}{10}\right)}=\sqrt{\left(2+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\theta_1 = 2\cos\frac{3\pi}{5} = -\text{koorde}\frac{2\pi}{10} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

de beide wortels zijn van

$$\theta^2-\theta-1=0, \ldots\ldots\ldots \text{(17 voor } n=5)$$

terwijl in het tweede lid van de eerste dezer formulen de beide dubbele cosinussen voor $p = 0$ tot waarde hebben θ_0 en $-\theta_1$; voor $p = 1$, θ_0 en $-\theta_1$; voor $p = 2$, θ_1 en $-\theta_0$; voor $p = 4$, θ_1 en $-\theta_0$; zoodat men, lettende op $\theta_0\,\theta_1 = -1$ en invoerende de notatie

$$\mu_t = \theta_0^t + \theta_1^t$$

en herstellende de doorgaande volgorde van $p = 0$ tot $p = 4$, vindt ter berekening van de coëfficiënten b de vijf formulen:

$$b_{10q+4} = 1 + \mu_{10q+5}, \qquad b_{10q+6} = 1 + \mu_{10q+7},$$

$$b_{10q+8} = -1 + \mu_{10q+7}, \qquad b_{10q+10} = \frac{-3 + \mu_{10q+10}}{2\ .\ .},$$

$$b_{10q+12} = -1 + \mu_{10q+11}.$$

Die berekening vindt echter, gemakkelijker dan door regtstreeksche bepaling van iederen coëfficiënt μ op zich zelf, plaats door middel van de zeer eenvoudige uit (17 voor $n = 5$) volgende terugloopende betrekking

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \mu_{t-2}$$

die, in verband met $\mu_0 = \theta_0^0 + \theta_1^0 = 2$ en $\mu_1 = \theta_0 + \theta_1 = 1$, in staat stelt alle opvolgende μ dadelijk uit elkander af te schrijven. Zelfs zou men, door op grond daarvan in de formule voor b_{10q+10} in plaats van μ_{10q+10} te schrijven $\mu_{10q+11} - \mu_{10q+9}$, kunnen volstaan met de uitrekening, en dan ook in de later voor $n = 1$ tot en met 6 volgende tabel de opname, alleen van die coëfficiënten μ die oneven aanwijzers hebben, waartoe de uit $(\theta^2 - 1)^2 = \theta^2$ volgende terugloopende betrekking $\mu_t = 3\,\mu_{t-2} - \mu_{t-4}$, gevoegd bij de aanvangstermen $\mu_1 = \theta_0 + \theta_1 = 1$ en $\mu_3 = \theta_0^3 + \theta_1^3 = 4$, zou kunnen dienen: eene handelwijze die evenwel niet boven de zoo even omschrevene te verkiezen schijnt.

Was het, zonder tevens de coëfficiënten b volgens de for-

mulen (15_a) en (15_b) als sommen van binomiaal-coëfficiënten uitgedrukt te willen vinden, alleen om de vijf thans verkregen eindformulen voor deze b te doen geweest, dan had de bewerking, zonder de algemeene herleidingsformulen (9_a) en (9_b) noodig te hebben, eenigzins kunnen worden bekort door van den beginne af de notatiën:

$$-\theta_0 = -2\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{4\pi}{5} = e^{\frac{4\pi i}{5}} + e^{-\frac{4\pi i}{5}} = \omega^2+\omega^3 =$$
$$= \frac{\omega^3+\omega^4}{\omega} = \frac{\omega^4+1}{\omega^3} = \frac{1+\omega}{\omega^3} = \frac{\omega+\omega^2}{\omega^4}$$

$$\text{en } -\theta_1 = -2\cos\frac{3\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = e^{\frac{2\pi i}{5}} + e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \omega+\omega^4 =$$
$$= \frac{\omega^2+1}{\omega} = \frac{\omega^3+\omega}{\omega^2} = \frac{\omega^4+\omega^2}{\omega^3} = \frac{1+\omega^3}{\omega^4}$$

als de beide negatief genomen wortels van $\theta^2-\theta-1=0$ in te voeren, die dus de gelegenheid geven om ieder der bij toepassing van $(8'_a)$ voorkomende tien sommen twee aan twee van de wortels $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ van $\omega^5-1=0$ eenvoudig als producten van deze $-\theta_0$ en $-\theta_1$ met die wortels zelve uit te drukken. Het schijnt intusschen minder noodig de berekening langs dezen weg in bijzonderheden te dezer plaatse nog eens te herhalen.

Het eenvoudige verband $b_{10q+8} = b_{10q+6}-2$ springt hier in het oog; maar overigens schijnen de verschillende coëfficiënten b onderling geene eenvoudige betrekkingen te vertoonen. Wel is waar zou men ook hier, in denzelfden geest als boven voor $n=4$, nog wel uit $\theta^2-\theta-1=0$ de vergelijking $\theta^{20}-123\,\theta^{10}+1=0$ kunnen afleiden die θ_0^{10} en θ_1^{10} tot wortels heeft, en daaruit eerst de periodieke terugloopende betrekking $\mu_s = 123\mu_{s-10}-\mu_{s-20}$ en vervolgens de overeenkomstige tusschen b_s, b_{s-10}, b_{s-20} kunnen opmaken: maar dadelijk blijkt dan dat deze laatste althans in zooverre meer zamengesteld is dan de overeenkomstige voor $n=4$ gevondene, dat zij, in tegenstelling met de dáár geldende een-

vormigheid, drie verschillende vormen aanneemt al naarmate men ze voor coëfficiënten van den vorm b_{10q+4} of b_{10q+6}, dan wel b_{10q+8} of b_{10q+12}, dan wel b_{10q+10}, noodig heeft.

Voor $n = 6$ of $\omega^6 - 1 = 0$, waarbij dus $p = 0, 1, 2, 3, 4$ en 5 te gebruiken, geeft de algemeene vergelijking (1'):

$$\cos\frac{\sqrt{x}}{2}.\prod_1^5{}_k \sin\frac{\sqrt{\omega^k x}}{2} = 2\left(\frac{i}{2}\right)^5 \sum_0^\infty{}_q (-)^q \Bigg\} + \frac{b_{12q+5}}{(12q+5)!}x^{\frac{12q+5}{2}} -$$

$$- \frac{b_{12q+7}}{(12q+7)!}x^{\frac{12q+7}{2}} - \frac{b_{12q+9}}{(12q+9)!}x^{\frac{12q+9}{2}} - \frac{b_{12q+11}}{(12q+11)!}x^{\frac{12q+11}{2}} -$$

$$- \frac{b_{12q+13}}{(12q+13)!}x^{\frac{12q+13}{2}} - \frac{b_{12q+15}}{(12q+15)!}x^{\frac{12q+15}{2}} \Bigg\},$$

terwijl in (4'') de zes volgende terugloopende betrekkingen bevat zijn:

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+6}{12r} b_{12q-12r+5}\, B_{12r-1} = -\frac{12q+6}{6} b_{12q+5},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+8}{12r+2} b_{12q-12r+5}\, B_{12r+1} = \frac{12q+8}{6} b_{12q+7},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+10}{12r+4} b_{12q-12r+5}\, B_{12r+3} = \frac{12q+10}{6} b_{12q+9},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+12}{12r+6} b_{12q-12r+5}\, B_{12r+5} = \frac{12q+12}{6} b_{12q+11},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+14}{12r+8} b_{12q-12r+5}\, B_{12r+7} = \frac{12q+14}{6} b_{12q+13},$$

$$\sum_0^q{}_r (-)^r \binom{12q+16}{12r+10} b_{12q-12r+5}\, B_{12r+9} = \frac{12q+16}{6} b_{12q+15},$$

waarvan weder de eerste volgens $(4''_0)$ ook te schrijven is onder den vorm:

$$\sum_1^t (-)^{r-1}\binom{12q+6}{12r} b_{12q-12r+5}\, B_{12r-1} = 2q\, b_{12q+5}.$$

Evenals voor $n=4$ kunnen nu ook weder de hierin voorkomende coëfficiënten b gevonden worden door de algemeene verdubbelingsformule (12), waarin men slechts op grond van hetgeen bij $n=3$ gebleken is te substitueren heeft $b'_{6r+2}=1$ en $b'_{12q-6r+2p+2}=b'_{2p+2}$ om te verkrijgen

$$b_{2p+5}=\begin{cases}(p=0\text{ tot }3)+\\(p=4\text{ tot }5)-\end{cases}\Bigg\{6b'_{2p+2}\sum_0^{r\leqq 2q+\frac{p}{3}}(-)^{q-r}\binom{12q+2p+5}{6r+3}\Bigg\},\ldots(12\text{ voor }n=6)$$

zijnde hierin verder voor $p=0, 1, 3$ en 4 te nemen $b'_{2p+2}=1$, daarentegen voor $p=2$ en 5, $b'_{2p+2}=\frac{1}{2}$. En wat vervolgens de goniometrische herleiding van deze uitdrukking betreft, daartoe geeft de algemeene formule (13) toegepast op $n=6$:

$$3\sum_0^{r\leqq 2q+\frac{p+1}{3}}(-)^{q-r}\binom{12q+2p+5}{6r+3}=\left(\cos\frac{(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_0^{12q+2p+5}+$$
$$+\left(\cos\frac{5(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_1^{12q+2p+5}+\left(\cos\frac{9(2p-1)\pi}{12}\right)\theta_2^{12q+2p+5},$$

waarin namelijk de vierkanten van

$$\theta_0=2\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{(2+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$

$$\theta_1=2\cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{2}\left(1+\cos\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{(2-\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

en $\theta_2=2\cos\frac{9\pi}{12}=-\sqrt{2}$

de drie wortels zijn van

$$\left.\begin{array}{l}\theta^6-6\,\theta^4+9\theta^2-2=0\\ \text{of } (\theta^4-4\,\theta^2+1)(\theta^2-2)=0,\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \text{ (14 voor } n=6)$$

terwijl overigens de in de drie termen van het tweede lid als factoren voorkomende cosinussen tot waarde hebben:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{voor } p=0: & \frac{\theta_0}{2},\ \frac{\theta_1}{2},\ \frac{\theta_2}{2};\\ \text{voor } p=1: & \frac{\theta_0}{2},\ \frac{\theta_1}{2},\ \frac{\theta_2}{2};\\ \text{voor } p=2: & -\frac{\theta_2}{2},\ \frac{\theta_2}{2},\ -\frac{\theta_2}{2};\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll}\text{voor } p=3: & \frac{\theta_1}{2},\ \frac{\theta_0}{2},\ -\frac{\theta_2}{2};\\ \text{voor } p=4: & -\frac{\theta_1}{2},\ -\frac{\theta_0}{2},\ \frac{\theta_2}{2};\\ \text{voor } p=5: & \frac{\theta_2}{2},\ -\frac{\theta_2}{2},\ \frac{\theta_2}{2}.\end{array}\right\}$$

Deze waarden in dat tweede lid substituerende en in acht nemende dat voor $p=0, 1, 3$ en 4 de bovengrens $r \leqq 2q+\frac{p+1}{3}$ in het eerste lid in geheele getallen telkens zamenvalt met de bovengrens $r \leqq 2q+\frac{p}{3}$ in het tweede lid van (12 voor $n=6$), dat daarentegen voor $p=2$ die grenzen zijn $2q+1$ en $2q$, voor $p=5$ evenzoo $2q+2$ en $2q+1$, maar dat in verband daarmede het bedoelde eerste lid is te schrijven voor $p=2$ onder den vorm $3\left\{\sum_0^{2q}(-)^{q-r}\binom{12q+9}{6r+3}+(-1)^{q+1}\right\}$ en voor $p=5$ onder den vorm $3\left\{\sum_0^{2q+1}(-)^{q-r}\binom{12q+15}{6r+3}+(-1)^q\right\}$, zoo vindt men achtervolgens voor $p=0, 1, 2, 3, 4$ en 5 deze zes formulen ter onafhankelijke berekening van de coëfficiënten b, namelijk:

$$b_{12q+5}=\theta_0^{12q+6}+\theta_1^{12q+6}+\theta_2^{12q+6},$$

$$b_{12q+7}=\theta_0^{12q+8}+\theta_1^{12q+8}+\theta_2^{12q+8},$$

$$b_{12q+9}=\frac{-\theta_0^{12q+9}\,\theta_2+\theta_1^{12q+9}\,\theta_2-\theta_2^{12q+10}+6\,(-1)^q}{2},$$

$$b_{12q+11} = \theta_0^{12q+11}\theta_1 + \theta_1^{12q+11}\theta_0 - \theta_2^{12q+12},$$

$$b_{12q+13} = \theta_0^{12q+13}\theta_1 + \theta_1^{12q+13}\theta_0 - \theta_2^{12q+14},$$

$$b_{12q+15} = \frac{-\theta_0^{12q+15}\theta_2 + \theta_1^{12q+15}\theta_2 - \theta_2^{12q+16} + 6(-1)^q}{2}.$$

Evenwel, niet alleen zijn door te letten op $\theta_0\theta_1 = 1$ deze waarden van b_{12q+11} en b_{12q+13} te vereenvoudigen; maar vooral ook zijn, door in de eerste en tweede termen van b_{12q+9} en b_{12q+15} na substitutie van $\theta_2 = -\theta_0 + \theta_1$ de producten uit te werken, door in te voeren de notatie

$$\mu_t = \frac{\theta_0^{2t} + \theta_1^{2t} + \theta_2^{2t}}{6},$$

(waarbij de noemer 6, die zooals dadelijk zal blijken steeds, behalve alleen voor $t = 0$, deelbaar is in den teller, is gekozen ten einde met zoo klein mogelijke geheele getallen te werken) en door verder waar noodig te substitueren $\theta_2^2 = 2$, de gezamenlijke zes formulen onder de volgende meer beknopte vormen te schrijven

$$\frac{b_{12q+5}}{6} = \mu_{6q+3},$$

$$\frac{b_{12q+11}}{6} = \mu_{6q+5} - 2^{6q+4},$$

$$\frac{b_{12q+7}}{6} = \mu_{6q+4},$$

$$\frac{b_{12q+13}}{6} = \mu_{6q+6} - 2^{6q+5},$$

$$\frac{b_{12q+9}}{6} = \frac{\mu_{6q+5} - \mu_{6q+4} - 2^{6q+3} + (-1)^q}{2},$$

$$\frac{b_{12q+15}}{6} = \frac{\mu_{6q+8} - \mu_{6q+7} - 2^{6q+6} + (-1)^q}{2},$$

wier gebruik voor de getallenberekening voornamelijk dit voordeel oplevert dat de daarin voorkomende coëfficiënten μ op grond van de vergelijking (14 voor $n = 6$) achtervolgens

uit elkander gemakkelijk zijn af te leiden door middel van de terugloopende betrekking

$$\mu_t = 6\,\mu_{t-1} - 9\,\mu_{t-2} + 2\,\mu_{t-3},$$

indien men namelijk eerst regtstreeks $\mu_0 = \frac{\theta_0^0 + \theta_1^0 + \theta_2^0}{6} = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \frac{\theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2}{6} = 1$ en $\mu_2 = \frac{\theta_0^4 + \theta_1^4 + \theta_2^4}{6} = 3$ heeft uitgerekend, zoodat hier tevens de juistheid blijkt van het reeds gezegde dat, uitgezonderd μ_0, al deze coëfficiënten μ geheele getallen zijn.

Men zou nog wel, lettende dat de voor θ_0 en θ_1 gevonden waarden aan elkander toegevoegd zijn en dat die voor θ_2 meer op zich zelve staat, in de formulen voor b overal de termen in $\theta_2 = -\sqrt{2}$ afzonderlijk en daarentegen die in θ_0 en in θ_1 met elkander verbonden kunnen houden, hetgeen dus zou nederkomen op het gebruik van den tweeden of gesplitsten vorm van (14 voor $n = 6$), en bij vervanging van de zoo even gebezigde coëfficiënten μ door andere, die op dezelfde wijze afhangen alleen van de beide wortels θ_0^2 en θ_1^2 van $\theta^4 - 4\,\theta^2 + 1 = 0$, eene meer eenvoudige terugloopende betrekking tusschen deze nieuwe coëfficiënten zou opleveren; maar eensdeels schijnt het regelmatiger de drie wortels te zamen in te voeren, en ten andere zou op deze nieuwe wijze de deelbaarheid van alle coëfficiënten b door 6 niet zoo gemakkelijk blijken. Die deelbaarheid overigens, in verband met de reeds in den aanvang gemaakte opmerking dat bij de werkelijke berekening van de Bernoulliaansche coëfficiënten zelve de coëfficiënten b alleen door hunne onderlinge verhoudingen van invloed zijn, geeft nog gereede aanleiding om voor dit doel de voor $\frac{b}{6}$ gevonden waarden in de plaats van die van b zelve te stellen.

E
cient
want

$n =$	1	2	3			
				μ_0		
b_0	$\frac{1}{2}$					b_0
b_1		$\frac{1}{2}$		μ_1		b_1
b_2	$\frac{1}{2^3}$		1			b_2
b_3		$\frac{1}{2^2}$		μ_2		b_3
b_4	$\frac{1}{2^5}$		1			

Zooals gezegd zal na de verrigte uitvoerige berekeningen voor de gevallen $n = 1$ tot en met 6 niet met de overeenkomstige berekening voor hoogere waarden van den periodenaanwijzer n worden voortgegaan. Wanneer men intusschen de gevonden uitkomsten overziet en bepaaldelijk let op de wijze waarop voor $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ de getallenwaarden der wortels θ, waarin de coëfficiënten b zijn uitgedrukt, afhangen van $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, dan rijst de vraag of ook niet voor grootere waarden van n die coëfficiënten min of meer eenvoudig in de bij de overeenkomstige cirkelverdeeling optredende wortelvormen zouden zijn uit te drukken; of bijv., om een bepaald geval te noemen, de oplossing van GAUSS voor den regelmatigen zeventienhoek niet misschien aanleiding zou kunnen geven dat ook tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten, wanneer men ze bij perioden van $n = 17$ indeelt, een betrekkelijk eenvoudig verband te vinden is. Enkele pogingen om eene dergelijke vraag nader te onderzoeken hebben mij evenwel tot geene uitkomst geleid.

Ten slotte moge hier een tabellarisch overzigt volgen van de bij $n = 1$ tot en met 6 behoorende getallenwaarden van eenige der eerste coëfficiënten b, voor $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ voorafgegaan door die van de coëfficiënten μ, en voor $n = 4$ nog bovendien door de coëfficiënten ν, waarin zij boven werden uitgedrukt, zooals een en ander zeer gemakkelijk gevonden wordt uit de medegedeelde terugloopende of onafhankelijke formulen, en waarbij dus deze waarden van b dienst zouden kunnen doen voor de groepsgewijze berekening der Bernoulliaansche coëfficiënten. Omtrent die tabel valt nog op te merken dat blijkens de evenbedoelde formulen niet iedere b berekend wordt uit de juist daarneven staande μ of ν, maar soms uit een wat hooger geplaatste μ of ν, soms uit twee verschillende μ of ν.

Evenals in het voorgaande voor de Bernoulliaansche coëfficiënten geschied is, kan men ook voor andere daarmede verwante coëfficiënten de in den aanvang uiteengezette algemeene

methode voor het vinden van periodieke terugloopende betrekkingen toepassen, en wel bepaaldelijk voor de zoogenaamde tangenten-, cosecanten- en secanten-coëfficiënten. Wij zullen daaromtrent minder uitvoerig zijn en, zonder ons te binden aan eene streng doorgevoerde toepassing der algemeene methode, slechts enkele betrekkingen van dien aard bij wijze van voorbeelden ontwikkelen. Met herhaling van de boven voor de Bernoulliaansche coëfficiënten gebezigde formule zullen als uitgangsformulen voor de berekening genomen worden de volgende vier in vorm vrij naauw overeenstemmende:

$$-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=\sum_0^\infty{}^q\frac{B_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1},\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sum_0^\infty{}^q\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1},$$

$$\operatorname{cosec}x=\sum_0^\infty{}^q\frac{C_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1},\quad \sec x=\sum_0^\infty{}^q\frac{E_{2q}}{(2q)!}x^{2q},$$

waarbij, in denzelfden zin als de in de ontwikkeling niet van $\cot x$ zelf maar van $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$, voorkomende Bernoulliaansche coëfficiënten B zouden kunnen genoemd worden herleide of verkleinde cotangenten-coëfficiënten, zoo ook de coëfficiënten T, ter onderscheiding van de grootere in $\operatorname{tg}x$ zelf voorkomende tangenten-coëfficiënten, zijn aan te duiden als herleide of verkleinde tangenten-coëfficiënten, terwijl C de cosecanten- en E de secanten- of zoogenaamde Euleriaansche coëfficiënten voorstellen.

Gelet op de reeds boven aan het slot van het geval $n=1$ opgemaakte waarden van $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ en $\operatorname{cosec}x$ blijken dan deze nieuwe coëfficiënten T en C met de Bernoulliaansche zamen te hangen volgens de eenvoudige formulen

$$T_{2q-1}=2(2^{2q}-1)B_{2q-1}\quad\text{en}\quad C_{2q-1}=2(2^{2q-1}-1)B_{2q-1},$$

dus ook $T_{2q-1}=2(B_{2q-1}+C_{2q-1})$, (die o. a. voor $q=0$ en wegens $B_{-1}=-1$ geven $T_{-1}=0$ en $C_{-1}=1$, zoodat in de formule voor $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ alleen voor de gelijkvormigheid de

benedengrens $q = 0$ in plaats van $q = 1$ is aangehouden); en iedere tusschen de coëfficiënten van eene dezer drie soorten te vinden betrekking is dus tevens door middel van deze substitutiën te beschouwen als eene betrekking tusschen de coëfficiënten van ieder der beide andere soorten. Daarentegen staan, zooals bekend is, de Euleriaansche coëfficiënten E meer op zich zelve en kunnen zij althans niet dan door formulen van meer zamengestelden, en wél van terugloopenden aard in de Bernoulliaansche worden uitgedrukt, of omgekeerd. Herinnerd moge nog worden, — en daardoor wordt er tevens gedeeltelijk rekenschap van gegeven waarom juist de vorenstaande coëfficiënten werden gekozen — dat zoowel T als E geheele oneven getallen zijn (zie deze reeds opgegeven in L. EULER's *Differenzial-Rechnung, übersetzt von* J. A. C. MICHELSEN, 2er Theil, 1790, pag. 213—214 en 257—262); de coëfficiënten C daarentegen zijn, evenals B, breuken.

Dit een en ander vooropgesteld zijnde, beginnen wij thans met de coëfficiënten T. Vooreerst geeft dan de identiteit

$$\cos x \,.\, \frac{1}{2} tg\, x = \frac{1}{2} \sin x \quad \text{of}$$

$$\left\{\sum_{0}^{\infty r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\sum_{1}^{\infty r} 2^{2r-2} \frac{T_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty q} (-)^{q-1} \frac{x^{2q-1}}{(2q-1)!}$$

de terugloopende betrekking

$$\sum_{1}^{q r} (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} 2^{2r-2} T_{2r-1} = q; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

de identiteit

$$(1 + \cos x) \,.\, tg \frac{x}{2} = \sin x \quad \text{of}$$

$$\left\{2 + \sum_{1}^{\infty r} (-)^{q-r} \frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\sum_{1}^{\infty r} \frac{T_{2r-1}}{(2r)!} x^{2r-1}\right\} = \sum_{0}^{\infty q} (-)^{q-1} \frac{x^{2q-1}}{(2q-1)!}$$

de betrekking

$$\sum_{1}^{q-1 r} (-)^{r-1} \binom{2q}{2r} T_{2r-1} + (-)^{q-1} 2\, T_{2q-1} = 2q; \quad \ldots \quad (18^{a})$$

en de identiteit

$$\sin x \,.\, tg\,\frac{x}{2} = 1 - \cos x \quad \text{of}$$

$$\left\{\sum_{0}^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r+1}}{(2q-2r+1)!}\right\}\left\{\sum_{1}^{\infty}\frac{T_{2r-1}}{(2r)!}x^{2r-1}\right\} = \sum_{1}^{\infty}(-)^{q-1}\frac{x^{2q}}{(2q)!}$$

de betrekking

$$\sum_{1}^{q}(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r}T_{2r-1} = 2q+1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18^{**})$$

En hiervan leert (18*), indien men, lettende op $\binom{2q}{2q-2r} = \binom{2q}{2r}$, den eersten term ingeval van q oneven onder den vorm $\sum_{1}^{\frac{q-1}{2}}(-)^{r-1}\binom{2q}{2r}(T_{2r-1} - T_{2q-2r-1})$, en ingeval van q even, lettende bovendien op $\binom{2q}{q} = \frac{(2q)!}{q!\,q!} = \frac{2q\,.\,(2q-1)!}{q\;(q-1)!\,q!} = 2\binom{2q-1}{q}$, onder den vorm $\sum_{1}^{\frac{q}{2}-1}(-)^{r-1}\binom{2q}{2r}(T_{2r-1} + T_{2q-2r-1}) + (-)^{\frac{q}{2}-1}\,.\,2\binom{2q-1}{q}T_{q-1}$ schrijft, dat, als alle voorgaande coëfficiënten T geheele oneven getallen zijn, alsdan ook T_{2q-1} althans een geheel getal is; terwijl het oneven zijn van dien coëfficiënt T_{2q-1} dan kan blijken doordien in (18**) verminderd met (18*), dat is in $\sum_{1}^{q-1}(-)^{r-1}\binom{2q}{2r-1}T_{2r-1} + (-)^{q-1}(2q-1)\,T_{2q-1} = 1$, iedere binomiaal-coëfficiënt $\binom{2q}{2r-1} = \frac{2q(2q-1)\,.\,2(q-1)(2q-3)\,.\,2(q-2)\ldots(2q-2r+3)\,.\,2(q-r+1)}{1\,.\quad 2(1)\,.\quad 3\,.\quad 2(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2(r-1).(2r-1)}$

$$= 2q \cdot \frac{\prod_{2}^{r}(2q-2r+3)}{\prod_{2}^{r}(2r-1)} \cdot \binom{q-1}{r-1}$$ steeds even is: met dat

gevolg alzoo, dat werkelijk alle coëfficiënten T geheel oneven zijn.

Maar ten andere verkrijgt men, evenzeer op het voetspoor van het boven voor de Bernoulliaansche coëfficiënten verrigte, uit de identiteit

$$(1+\cos x)\cdot\frac{d\left(x\,tg\frac{x}{2}\right)}{dx} = 2\cos^2\frac{x}{2}\left(tg\frac{x}{2}+\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right) = \sin x + x$$

$$\left\{2+\sum_{1}^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\sum_{1}^{r}\frac{T_{2r-1}}{(2r-1)!}x^{2r-1}\right\} = x+\sum_{1}^{q}(-)^{q-1}\frac{x^{2q-1}}{(2q-1)!}$$

de betrekking (mits $q \geqq 2$ zij)

$$\sum_{1}^{q-1}(-)^{r-1}\binom{2q-1}{2r-1}T_{2r-1} + (-)^{q-1}\,2\,T_{2q-1} = 1,$$

en uit de identiteit

$$(1+\cos x)\cdot\frac{d\,tg\frac{x}{2}}{dx} = 2\cos^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = 1$$

of $$\left\{2+\sum_{1}^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\sum_{1}^{r}\frac{(2r-1)\,T_{2r-1}}{(2r)!}x^{2r-2}\right\} = 1$$

de betrekking (voor $q \geqq 2$)

$$\sum_{1}^{r-1}(-)^{r-1}(2r-1)\binom{2q}{2r}T_{2r-1} + (-)^{q-1}\,2(2q-1)\,T_{2q-1} = 0,$$

welke beide laatste betrekkingen trouwens ook zouden gekomen zijn door, na in (18**) q te hebben vervangen door $q-1$, deze hetzij op zich zelve af te trekken van (18*), dan wel vermenigvuldigd met $2q$ af te trekken van $(2q-1)$ maal de laatstgenoemde. Nog moge, zonder het verder uit te werken, worden aangestipt dat in plaats van eene enkele aftrekking eene herhaalde aftrekking van dezelfde betrekkingen (18*) en (18**), na daarin voor q achtervolgens te hebben geschreven $q-1$, $q-2$, enz., $q-\frac{k-1}{2}$ of $q-\frac{k}{2}$, ook hier weder tot zoogenaamde afgebroken terugloopende betrekkingen tusschen de coëfficiënten T zou voeren, overeenkomstig met de boven voor de Bernoulliaansche coëfficiënten uit de analoge betrekkingen (4*) en (4**) afgeleide.

Eindelijk worde nog in het voorbijgaan de uit $\frac{\sin 2x}{2} \cdot tg\frac{x}{2} = -\frac{1+\cos 2x}{2} + \cos x$ af te leiden betrekking

$$\sum_1^q (-)^{r-1} \binom{2q+1}{2r} 2^{2q-2r} T_{2r-1} = (2q+1)(2^{2q-1}-1)$$

vermeld.

Gaan wij thans tot de eigenlijke periodieke terugloopende betrekkingen over. Voor de periode $n = 2$ kan men uitgaan van de identiteit

$$\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{ix}{2}\right) tg\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{ix}{2},$$

dat is, omdat

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{ix}{2} = \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(1+i)x}{2} + \cos\frac{(1-i)x}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0^\infty (-)^r \frac{(1+i)^{2r} + (1-i)^{2r}}{2^{2r}.(2r)!} x^{2r} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty (-)^r \frac{(2i)^r + (-2i)^r}{2^{2r}.(2r)!}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{2(2i)^{2q}}{2^{4q}.(4q)!} x^{4q} = \sum_0^\infty (-)^q \frac{x^{4q}}{2^{2q}.(4q)!}$$

en $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{ix}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sin\frac{(1+i)x}{2}+\sin\frac{(1-i)x}{2}\right\}=$

$$=\frac{1}{2}\sum_0^\infty{}_r(-)^r\frac{(1+i)^{2r+1}+(1-i)^{2r+1}}{2^{2r+1}.(2r+1)!}x^{2r+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_0^\infty{}_r(-)^r\frac{(1+i)(2i)^r+(1-i)(-2i)^r}{2^{2r+1}.(2r+1)!}x^{2r+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_1^\infty{}_q\left(-\frac{2i(2i)^{2q-1}}{2^{4q-1}.(4q-1)!}x^{4q-1}+\sum_0^\infty{}_q\frac{2(2i)^{2q}}{2^{4q+1}.(4q+1)!}x^{4q+1}\right\}=\right.$$

$$=-\sum_1^\infty{}_q(-)^q\frac{x^{4q-1}}{2^{2q}.(4q-1)!}+\sum_0^\infty{}_q(-)^q\frac{x^{4q+1}}{2^{2q+1}.(4q+1)!}$$

wordt, de identiteit:

$$\sum_0^q{}_r(-)^{q-r}\frac{x^{4q-4r}}{2^{2q-2r}.(4q-4r)!}\left\{\sum_0^\infty{}_r\frac{T_{4r-1}}{(4r)!}x^{4r-1}+\sum_0^\infty{}_r\frac{T_{4r+1}}{(4r+2)!}x^{4r+1}\right\}=$$

$$=-\sum_1^\infty{}_q(-)^q\frac{x^{4q-1}}{2^{2q}(4q-1)!}+\sum_0^\infty{}_q(-)^q\frac{x^{4q+1}}{2^{2q+1}(4q+1)!},$$

gevende dus de twee betrekkingen:

$$\sum_0^q{}_r(-)^r\binom{4q}{4r}2^{2r}T_{4r-1}=-4q$$

$$\text{en}\quad\sum_0^q{}_r(-)^r\binom{4q+2}{4r+2}2^{2r+1}T_{4r+1}=4q+2,$$

die weder als vroeger in het overeenkomstige geval onder den gemeenschappelijken vorm

$$\sum_{0\text{ of }1}^q{}_r(-)^{\frac{r\text{ of }r+1}{2}}\binom{2q}{2r}2^rT_{2r-1}=-2q$$

zouden zijn zamen te schrijven onder voorwaarde dat daarin

aan r uitsluitend óf de opvolgende even óf de opvolgende oneven waarden worden gegeven.

Voor het geval van $n=3$ of $\omega^3-1=0$ of $\omega^2+\omega+1=0$ ontwikkele men de identiteit

$$\left(\frac{2^2}{3}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega^2 x}{2}\right)tg\,\frac{x}{2}=\frac{2^2}{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega^2 x}{2},$$

waartoe men heeft:

$$2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega^2 x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\left\{\cos\frac{(\omega+\omega^2)x}{2}+\cos\frac{(\omega-\omega^2)x}{2}\right\}=$$

$$=(1+\cos x)+\left\{\cos\frac{(1+\omega-\omega^2)x}{2}+\cos\frac{(1-\omega+\omega^2)x}{2}\right\}=$$

$$=1+\cos x+\cos\omega x+\cos\omega^2 x=4+3\sum_1^\infty{}^{q}(-)^q\frac{x^{6q}}{(6q)!}$$

en $$2^2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega^2 x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\left\{\cos\frac{(\omega+\omega^2)x}{2}+\cos\frac{(\omega-\omega^2)x}{2}\right\}=$$

$$=\sin x+\left\{\sin\frac{(1+\omega-\omega^2)x}{2}+\sin\frac{(1-\omega+\omega^2)x}{2}\right\}=$$

$$=\sin x-\sin\omega x-\sin\omega^2 x=-\sum_1^\infty{}^{q}(-)^q\frac{2x^{6q-1}}{(6q-1)!}+$$

$$+\sum_0^\infty{}^{q}(-)^q\frac{2x^{6q+1}}{(6q+1)!}+\sum_0^\infty{}^{q}(-)^q\frac{x^{6q+3}}{(6q+3)!},$$

zoodat men substituerende verkrijgt:

$$\left\{\frac{4}{3}+\sum_1^\infty{}^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{6q-6r}}{(6q-6r)!}\right\}\left\{\sum_0^\infty{}^{r}\frac{T_{6r-1}}{(6r)!}x^{6r-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_0^\infty{}^{r}\frac{T_{6r+1}}{(6r+2)!}x^{6r+1}+\sum_0^\infty{}^{r}\frac{T_{6r+3}}{(6r+4)!}x^{6r+3}\right\}=\frac{1}{3}\left\{-\sum_1^\infty{}^{q}(-)^q\frac{2x^{6q-1}}{(6q-1)!}\right.$$

$$\left.+\sum_0^\infty{}^{q}(-)^q\frac{2x^{6q+1}}{(6q+1)!}+\sum_0^\infty{}^{q}(-)^q\frac{x^{6q+3}}{(6q+3)!}\right\},$$

en daaruit de drie betrekkingen:

$$\sum_0^{r-1}(-)^r\binom{6q}{6r}T_{6r-1}+(-)^q\frac{4}{3}T_{6q-1}=-2.\frac{6q}{3},$$

$$\sum_0^{r-1}(-)^r\binom{6q+2}{6r+2}T_{6r+1}+(-)^q\frac{4}{3}T_{6q+1}=2.\frac{6q+2}{3},$$

$$\sum_0^{r-1}(-)^r\binom{6q+4}{6r+4}T_{6r+3}+(-)^q\frac{4}{3}T_{6q+3}=\frac{6q+4}{3}.$$

Voor de cosecanten-coëfficiënten C heeft men vooreerst uit

$$\sin x\,.\,\mathrm{cosec}\,x=1$$

of $$\left\{\sum_0^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r+1}}{(2q-2r+1)!}\right\}\left\{\sum_0^{r}\frac{C_{2r-1}}{(2r)!}x^{2r-1}\right\}=1$$

de gewone terugloopende betrekking

(mits $q\geqq 1$ zij) $$\sum_0^{q}(-)^r\binom{2q+1}{2r}C_{2r-1}=0,$$

die trouwens, lettende op $C_{2r-1}=2(2^{2r-1}-1)B_{2r-1}$, blijkt niet anders te zijn dan het dubbel van de overmaat van de vroeger voor de Bernoulliaansche coëfficiënten gevonden betrekking (4*) boven ($4''_0$ voor $n=1$).

Vervolgens komen als periodieke terugloopende betrekkingen in de eerste plaats in aanmerking de beide uit de identiteit

$$(\sin x\ \sin ix)\ \mathrm{cosec}\,x=\sin ix$$

$$\sum_0^{r}(-)^{q-r}\frac{2^{2q-2r+1}i}{(4q-4r+2)!}x^{4q-4r+2}\left\{\sum_0^{r}\frac{C_{4r-1}}{(4r)!}x^{4r-1}+\sum_0^{r}\frac{C_{4r+1}}{(4r+2)!}x^{4r+1}\right\}=$$

$$=i\left\{\sum_0^{q}\frac{x^{4q+1}}{(4q+1)!}+\sum_0^{q}\frac{x^{4q+3}}{(4q+3)!}\right\}$$

voortvloeijende, namelijk:

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{q-r}\binom{4q+2}{4r}2^{2q-2r+1}C_{4r-1}=4q+2$$

$$\text{en}\quad\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^{q-r}\binom{4q+4}{4r+2}2^{2q-2r+1}C_{4r+1}=4q+4,$$

die desverkiezende weder onder den enkelen vorm

$$\sum_{0\text{of }1}^{q}{}_{r}(-)^{\frac{q-r}{2}}\binom{2q+2}{2r}2^{q-r+1}C_{2r-1}=2q+2$$

vervat zijn, onder uitdrukkelijke voorwaarde dat hierin r óf alleen even, óf alleen oneven genomen wordt, en die bovendien uit het vroeger gevondene kunnen worden afgeleid, waartoe men slechts opvolgend van 2^{2q} maal de eerste en van 2^{2q+1} maal de tweede der betrekkingen ($4''$ voor $n=2$) heeft af te trekken 2 maal de eerste en 2 maal de tweede der in de daarop volgende alinea eerst voorkomende betrekkingen.

Verder blijkt in denzelfden trant als vroeger dat voor $n=3$ of $\omega^8-1=0$ de identiteit

$$\left(\frac{2^2}{3}\sin x\sin\omega x\sin\omega^2 x\right)\operatorname{cosec}x=\frac{2^3}{3}\sin\omega x\sin\omega^2 x$$

bij ontwikkeling overgaat in

$$\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{r}^{q-r}(-)^{q-r}\frac{2^{6q-6r+3}}{(6q-6r+3)!}x^{6q-6r+3}\right\}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{r}\frac{C_{6r-1}}{(6r)!}x^{6r-1}+\sum_{0}^{\infty}{}_{r}\frac{C_{6r+1}}{(6r+2)!}x^{6r+1}\right.$$

$$\left.+\sum_{0}^{\infty}{}_{r}\frac{C_{6r+3}}{(6r+4)!}x^{6r+3}\right\}=\frac{2}{3}\left\{-\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{(-3)^{3q+1}-1}{(6q+2)!}x^{6q+2}\right.$$

$$\left.+\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{(-3)^{3q+2}-1}{(6q+4)!}x^{6q+4}-\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{q}\frac{(-3)^{3q+3}-1}{(6q+6)!}x^{6q+6}\right.$$

en mitsdien geeft de drie betrekkingen:

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r\binom{6q+3}{6r}2^{6q-6r+3}C_{6r-1}=-\frac{2(6q+3)}{3}\{(-3)^{3q+1}-1\},$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r\binom{6q+5}{6r+2}2^{6q-6r+3}C_{6r+1}=\frac{2(6q+5)}{3}\{(-3)^{3q+2}-1\},$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r\binom{6q+7}{6r+4}2^{6q-6r+3}C_{6r+3}=-\frac{2(6q+7)}{3}\{(-3)^{3q+3}-1\}.$$

Door ook in deze, na deeling door 2, de coëfficiënten C te vervangen door hunne waarden in B, en door ze dan opvolgend af te trekken van 2^{6q+2} maal, 2^{6q+4} maal, 2^{6q+6} maal de vroeger in het geval van $n=3$ verkregen periodieke terugloopende betrekkingen tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten, blijkt nog dat deze laatste coëfficiënten bovendien onderling zamenhangen volgens

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r\binom{6q+3}{6r}2^{6q-6r+3}B_{6r-1}=-\frac{6q+3}{3}\{4^{3q+1}-(-3)^{3q+1}+1\},$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r\binom{6q+5}{6r+2}2^{6q-6r+3}B_{6r+1}=\frac{6q+5}{3}\{4^{3q+2}-(-3)^{3q+2}+1\},$$

$$\sum_{0}^{q}{}_{r}(-)^r\binom{6q+7}{6r+4}2^{6q-6r+3}B_{6r+3}=\frac{6q+7}{3}\left\{\frac{1}{2}.4^{3q+3}+(-3)^{3q+3}-1\right\},$$

die ook regtstreeks zouden gevonden zijn indien men, in denzelfden geest als toenmaals in het geval van $n=2$, de identiteit $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=-\frac{(1+\cos x)(2\sin\omega x\sin\omega^2 x)}{2^2\sin x\sin\omega x\sin\omega^2 x}$ had ontwikkeld. Wilde men in dezen zin nog een stap verder gaan en evenzeer de identiteit $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}=-\frac{\sin x(1-\cos\omega x)(1-\cos\omega^2 x)}{2(1-\cos x)(1-\cos\omega x)(1-\cos\omega^2 x)}$ ontwikkelen, dan zal het wel niet verwonderen dat de aldus

komende betrekkingen in B nog meer zamengesteld zouden wezen.

Overigens spreekt het van zelf dat door gebruik te maken van het verband $T_{2r-1} = 2(2^{2r}-1)B_{2r-1}$ de verschillende boven regtstreeks opgemaakte betrekkingen tusschen de coëfficiënten T op dezelfde wijze uit die voor B kunnen worden afgeleid als thans voor de coëfficiënten C is aangewezen.

Wat betreft de Euleriaansche coëfficiënten, de eenvoudigste daartusschen bestaande terugloopende betrekking wordt onmiddellijk gevonden uit de identiteit

$$\cos x \,.\, \sec x = 1 \text{ of } \left\{\sum_0^{q-r}(-)^{q-r}\frac{x^{2q-2r}}{(2q-2r)!}\right\}\left\{\sum_0^{r}\frac{E_{2r}}{(2r)!}x^{2r}\right\} = 1$$

en is dus: (voor $q \gtrless 1$) $\displaystyle\sum_0^{q}(-)^r\binom{2q}{2r}E_{2r} = 0$;

zij werd reeds door EULER zelf op pag. 261—262 van zijne boven aangehaalde *Differenzial-Rechnung* op deze wijze ontwikkeld.

Iets meer zamengesteld zijn de beide volgende betrekkingen, namelijk vooreerst uit:

$$\frac{\sin 2x}{2} \,.\, \sec x = \sin x$$

$$\text{of } \left\{\sum_0^{q-r}(-)^{q-r}\frac{2^{2q-2r}}{(2q-2r+1)!}x^{2q-2r+1}\right\}\left\{\sum_0^{r}\frac{E_{2r}}{(2r)!}x^{2r}\right\} = \sum_0^{q}(-)^q\frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!}$$

de betrekking

$$\sum_0^{q}(-)^r\binom{2q+1}{2r}2^{2q-2r}E_{2r} = 1,$$

en ten andere uit:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \sec x = \cos x$$

$$\left\{1+\sum_{1}^{\infty}{}^{r}(-)^{q-r}\frac{2^{2q-2r-1}}{(2q-2r)!}x^{2q-2r}\right\}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}^{r}\frac{E_{2r}}{(2r)!}x^{2r}\right\}=\sum_{0}^{\infty}{}^{q}(-)^{q}\frac{x^{2q}}{(2q)!}$$

de betrekking

$$\sum_{0}^{q-1}{}^{r}(-)^{r}\binom{2q}{2r}2^{2q-2r-1}E_{2r}+(-)^{q}E_{2q}=1.$$

Deze laatste is zeker wel de meest geschikte om dadelijk alle coëfficiënten E als geheele oneven getallen te doen kennen.

Voor periodieke terugloopende betrekkingen zullen wij ons ook hier weder bepalen tot de gevallen $n=2$ en $n=3$. In het eerste geval vindt men uit de identiteit

$$(\cos x \cos ix)\sec x = \cos ix$$

$$\left\{\sum_{0}^{\infty}{}^{r}(-)^{q-r}\frac{2^{2q-2r}}{(4q-4r)!}x^{4q-4r}\right\}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}^{r}\frac{E_{4r}}{(4r)!}x^{4r}+\sum_{0}^{\infty}{}^{r}\frac{E_{4r+2}}{(4r+2)!}x^{4r+2}\right\}=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}{}^{q}\frac{x^{4q}}{(4q)!}+\sum_{0}^{\infty}{}^{q}\frac{x^{4q+2}}{(4q+2)!}$$

de beide betrekkingen

$$\sum_{0}^{q}{}^{r}(-)^{q-r}\binom{4q}{4r}2^{2q-2r}E_{4r}=1$$

$$\text{en}\quad\sum_{0}^{q}{}^{r}(-)^{q-r}\binom{4q+2}{4r+2}2^{2q-2r}E_{4r+2}=1,$$

of, wil men liever, de enkele mits slechts uitsluitend voor even of uitsluitend voor oneven r te gebruiken betrekking

$$\sum_{0\text{ of }1}^{q}{}^{r}(-)^{\frac{q-r}{2}}\binom{2q}{2r}2^{q-r}E_{2r}=1.$$

In het tweede geval, of voor $\omega^3 - 1 = 0$, is te gebruiken de identiteit

$$\left(\frac{2^2}{3}\cos x\cos\omega x\cos\omega^2 x\right)\sec x = \frac{2^2}{3}\cos\omega x\cos\omega^2 x,$$

dat is ontwikkeld

$$\left\{\frac{4}{3} + \sum_1^{\infty}{}^{q-r}(-)^{q-r}\frac{2^{6q-6r}}{(6q-6r)!}x^{6q-6r}\right\}\left\{\sum_0^{\infty}{}^{r}\frac{E_{6r}}{(6r)!}x^{6r} + \sum_0^{\infty}{}^{r}\frac{E_{6r+2}}{(6r+2)!}x^{6r+2}\right.$$
$$\left. + \sum_0^{\infty}{}^{r}\frac{E_{6r+4}}{(6r+4)!}x^{6r+4}\right\} = \frac{2}{3}\left\{\sum_0^{\infty}{}^{q}(-)^q\frac{(-3)^{3q}+1}{(6q)!}x^{6q}\right.$$
$$\left. - \sum_0^{\infty}{}^{q}(-)^q\frac{(-3)^{3q+1}+1}{(6q+2)!}x^{6q+2} + \sum_0^{\infty}{}^{q}(-)^q\frac{(-3)^{3q+2}+1}{(6q+4)!}x^{6q}\right.$$

om te komen tot de drie betrekkingen:

$$\sum_0^{q-1}{}^{r}(-)^r\binom{6q}{6r}2^{6q-6r}E_{6r} + (-)^q\frac{4}{3}E_{6q} = \frac{2}{3}\{(-3)^{3q} +$$

$$\sum_0^{q-1}{}^{r}(-)^r\binom{6q+2}{6r+2}2^{6q-6r}E_{6r+2} + (-)^q\frac{4}{3}E_{6q+2} = -\frac{2}{3}\{(-3)^{3q+1} +$$

$$\sum_0^{q-1}{}^{r}(-)^r\binom{6q+4}{6r+4}2^{6q-6r}E_{6r+4} + (-)^q\frac{4}{3}E_{6q+4} = \frac{2}{3}\{(-3)^{3q+2} +$$

Ten opzigte zoowel van de cosecanten- als van de secanten-coëfficiënten zullen wij overigens met stilzwijgen voorbijgaan de wijze waarop ook hier weder soortgelijke afgebroken terugloopende betrekkingen zouden kunnen worden opgemaakt als boven voor de Bernoulliaansche coëfficiënten gevonden werden.

Evenmin zullen wij ons bezig houden met de oplossing der coëfficiënten T, C en E in determinanten-vorm uit de voor deze coëfficiënten gevonden betrekkingen, op dezelfde wijze als dit almede vroeger voor de Bernoulliaansche coëfficiënten heeft plaats gehad.

En evenmin eindelijk zullen wij, bij de uitbreiding die deze bijdrage reeds verkregen heeft, thans nog treden in een nader onderzoek van de functie $sec\, x + tg\, x$, ten einde daaruit, zooals o. a. door SCHERK, STERN, SCHLÖMILCH, CATALAN. in hunne straks aan te halen stukken geschied is, betrekkingen af te leiden waardoor de secanten- en de tangenten-coëfficiënten, zoo even ieder afzonderlijk door middel van $sec\, x$ en van $tg\frac{x}{2}$ onderzocht, als het ware aan elkander gekoppeld worden.

In den loop der voorgaande beschouwingen bestond reeds aanleiding om eenige op de Bernoulliaansche en verwante coëfficiënten betrekking hebbende werken of verhandelingen aan te halen. Hier moge thans nog eene opgave volgen van verschillende andere dergelijke stukken, eene opgave die evenwel in de verte geene aanspraak maakt op volledigheid ten aanzien der zoo uitgebreide litteratuur over dit onderwerp; van enkele dezer na te noemen stukken ben ik niet in de gelegenheid geweest kennis te nemen.

L. EULER, in *Novi Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae*, T. 14, pro anno 1759 (moet zijn 1769), Pars I, pag. 129—167.

DE LA PLACE, in *Mémoires de l'Académie royale des sciences, Paris*, Année 1777, pag. 99—122.

L. EULER, *Differenzial-Rechnung, übersetzt von* J. A. C. MICHELSEN, 2er Theil, 1790, pag. 125—158, 211—216, 256—262.

H. A. ROTHE, in C. F. HINDENBURG's *Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen*, zweijte Sammlung 1800, pag. 306—340.

C. KRAMP, *Elémens d'arithmétique universelle*, 1808, pag. 361—362.

S. F. LACROIX, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e Ed., T. 1, 1810, pag. 254—257; T. 3, 1819, pag. 81—85, 107—116, 126 noot, 137, 145—146, 148—151, 443—445, 450, 732.

J. F. W. HERSCHEL, in *Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year* 1816, Part I, pag. 25—45.

EYTELWEIN, in *Abhandlungen mathem. Klasse der Berliner Akademie*, 1816—1817, pag. 28—41.

J. A. GRUNERT, *Mathematische Abhandlungen*, 1822, pag. 57—60, 93.

J. A. EYTELWEIN, *höhere Analysis*, 1824, I, pag. 488.

H. F. SCHERK, *Mathematische Abhandlungen*, 1825.

A. L. CRELLE—C. W. BORCHARDT, *Journal für die Mathematik:* H. F. SCHERK, in 4er Bd., 1829, pag. 299—304; G. LIBRI, in 7er Bd., 1831, pag. 57—67; M. OHM, in 20er Bd., 1840, pag. 11—12; VON STAUDT, in 21er Bd., 1840, pag. 372—374; STERN, in 26er Bd., 1843, pag. 88—91; O. EISENLOHR, in 28er Bd., 1844, pag. 193—212; O. SCHLÖMILCH, in 32er Bd., 1846, pag. 360—364; E. E. KUMMER, in 41er Bd., 1851, pag. 368—372; G. BAUER, in 57er Bd., 1860, pag. 256—272; G. BAUER, in 58er Bd., 1861, pag. 292—300; STERN, in 79er Bd., 1875, pag. 67—98; HERMITE, in 81er Bd., 1876, pag. 93—95; STERN, in id., pag. 290—294; STERN, in 84er Bd., 1878, pag. 267—269; J. C. ADAMS, (*Table of the values of the first sixty-two numbers of Bernoulli*), in 85er Bd., 1878, pag. 269—272; STERN, in 88er Bd., 1880, pag. 85—95; A. RADICKE, in 89er Bd., 1880, pag. 257—261.

DROBISCH, *Observationes analyticae*, 1831, pag. 16.

TH. CLAUSEN, in H. C. SCHUMACHER's *Astronomische Nachrichten*, 17er Bd., 1840, pag. 351—352.

J. A. GRUNERT, *Archiv der Mathematik und Physik:* O. SCHLÖMILCH, in 3er Th., 1843, pag. 9—18; O. SCHLÖMILCH, in 16er Th., 1851, pag. 411—418.

VON STAUDT, *de numeris Bernoullianis*, 1845.

Idem, idem, *commentatio altera*, 1845.

Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris: BINET, in T. 32, 1851, pag. 918—921; F. THOMAN, (*logarithmes des* 40 *premiers nombres de Bernoulli*), in T. 50, 1860, pag. 905—906; SYLVESTER, in T. 52, 1861, pag. 161—163, 212—214, 307—308; E. CATALAN, in T. 54, 1862, pag. 1030—1033, 1059—1062; LE BESGUE, in T. 58, 1864, pag. 853—856;

E. CATALAN, in id., pag. 902—903; CHASLES, in id., pag. 903—904; LE BESGUE, in id., pag. 937—938; E. CATALAN, in id., pag. 1105—1108; E. CATALAN, in T. 81, 1875, pag. 441—443; C. LE PAIGE, in id., pag. 966—967; E. LUCAS, in T. 83, 1876, pag. 539—541.

B. TORTOLINI—F. BRIOSCHI, *Annali di Matematica:* A. GENOCCHI, 1852; E. LUCAS, in Ser. 2, T. 8, 1877, pag. 56—79.

G. F. MEIJER, *Ueber Bernoullische Zahlen. Inauguraldissertation*, 1859.

J. BERTRAND, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul différentiel*, 1864, pag. 305—307, 325—326, 346—347, 347—354, 389—390, 421. *Calcul intégral*, 1870, pag. 143—145.

E. CATALAN, *Mélanges mathématiques*, 1868, pag. 110—132, 313—334.

E. CATALAN, in *Mémoires de l'Académie royale des sciences etc. de Belgique*, T. 37, 1869, pag. 1—19.

J. W. L. GLAISHER, in *Proceedings of the London mathematical society*, Vol. 4, 1871—1873, pag. 212—214.

J. C. ADAMS, in *Proceedings of the Cambridge philosophical society*, Vol. 2, 1872, pag. 269—270.

The Messenger of mathematics: J. W. L. GLAISHER, in 2d Ser., Vol. 2, (1873?), pag. 190—191; A. CAYLEY, in 2d Ser., Vol. 5, pag. 157—160; E. LUCAS, in 2d Ser., Vol. 7, pag. 139—141.

J. W. L. GLAISHER, (*Tables of the first* 250 *Bernoulli's Numbers* (*to nine figures*) *and their logarithms* (*to ten figures*)), in *Transactions of the Cambridge philosophical society*, Vol. 12, Part. 1, 1873, pag. 384—391.

C. LE PAIGE, in *Annales de la société scientifique de Bruxelles*, T. 1, B, 1875—1876, pag. 43—50.

Nouvelle Correspondance mathématique: E. LUCAS en E. CATALAN, in T. 2, 1876, pag. 328—338; E. LUCAS, in T. 3, 1877, pag. 69—73; CATALAN, in T. 4, 1878, pag. 119; E. LUCAS en H. BROCARD, in T. 5, 1879, pag. 282—285; E. LUCAS en RADICKE, in T. 6, 1880, pag. 69—72.

Nouvelles Annales de mathématiques: WORONTZOFF, in 2e Série, T. 15, 1876, pag. 12—19; E. LUCAS, in id., pag. 497—499; E. LUCAS, in 2e Série, T. 16, 1877, pag. 18—26, 157—160.

Bulletins de l'Académie royale des sciences etc. de Belgique: C. LE PAIGE, in 45e Année, 2e Série, T. 41, 1876, pag. 1017; E. CATALAN, in id., pag. 1018—1019.

Dr. L. SCHENDEL, *Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem*, etc., 1876.

L. SEIDEL, in *Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München*, Band 7, Jahrg. 1877, pag. 157—187.

J. C. ADAMS, in *Report 47th meeting British Association in* 1877, pag. 8—14 (Transactions of the sections).

E. LUCAS, in *Bulletin de la société mathématique de France*, T. 6, 1877—1878, pag. 57—68.

GOHIERRE DE LONGCHAMPS, in *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 2e Série, T. 8, Année 1879, pag. 55—80.

W. KÜTTNER, in SCHLÖMILCH's *Zeitschrift für Mathematik etc.*, 24er Jahrg., 1879, pag. 250—252.

A. RADICKE, *Die Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen*, 1880.

AANTEEKENING.

Op verschillende wijzen wordt de boven in het geval van $n = 4$, vergelijking (14), toegepaste formule voor den cosinus van het veelvoud van een boog in functie der magten van den cosinus van den boog zelf bewezen, waaromtrent men o. a. kan nazien:

S. F. LACROIX, *Calcul différentiel et calcul intégral*, 2e Ed., T. 1, 1810, pag. 76—85, 87—93, 263—275; T. 3, 1819, pag. 216—220, 605—611, 616—623.

G. F. W. BAEHR, in *Verslagen en meded. der Kon. Akademie van wetenschappen*, afd. Natuurk., Deel 10, 1860, pag. 86—92.

Nouvelles Annales de mathématiques: A. VACHETTE, in T. 20, 1861, pag. 155—174; KESSLER en L. VERHARNE, in id., pag. 264—266; MOURGUE, in 2e Série, T. 12, 1873, pag. 408—417; V. A. LE BESGUE, in id., pag. 425—431; DESBOVES, in 2e Série, T. 14, 1875, pag. 385—391.

J. BERTRAND, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Calcul différentiel*, 1864, pag. 296—303.

J. A. SERRET, *Algèbre supérieure*, 3e Ed., T. 1, 1866, pag. 235—239.

YVON VILLARCEAU, in *Comptes rendus de l'Académie des sciences, Paris*, T. 82, 1876, pag. 1469—1471.

A. DESBOVES, *Questions de trigonométrie rectiligne*, 2e Ed., 1877, pag. 91—93.

E. CATALAN en RONKAR, in *Nouvelle Correspondance mathématique*, T. 6, 1880, pag. 100—105.

Het is mij niet bekend of ergens een bewijs voorkomt in den geest van het hier volgende, waardoor de bedoelde formule gevonden wordt door de gemakkelijker te betoogen formule voor de magt van den cosinus uitgedrukt in de cosinussen der veelvouden als het ware om te keeren.

Voor deze laatste formule, waarvan boven ter gelegenheid van (8_a) en (8_b) reeds werd opgemerkt hoe zij ook in dezen is vervat, heeft men namelijk onmiddellijk naarmate n oneven of even is:

$$(2\cos\varphi)^n=(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^n=\sum_0^{\frac{n-1}{2}\text{of}\frac{n}{2}}\binom{n}{r}(e^{(n-r)i\varphi}.e^{-ri\varphi}+e^{ri\varphi}.e^{-(n-r)i\varphi})=$$

$$=2\sum_0^{\frac{n-1}{2}\text{of}\frac{n}{2}}\binom{n}{r}\cos(n-2r)\varphi\,,$$

behoudens dat, om overeenkomstige reden als voor (8_b) werd vermeld, in het geval van n even bij den laatsten, door $r=\frac{n}{2}$ bepaalden, term de getallencoëfficiënt $\frac{1}{2}$ moet worden voorgevoegd.

En wil men nu door middel hiervan bewijzen dat wederkeerig de iets meer zamengestelde formule

$$2\cos n\varphi=(2\cos\varphi)^n+n\sum_1^{\frac{n-1}{2}\text{of}\frac{n}{2}}\frac{(-)^l}{l}\binom{n-l-1}{l-1}(2\cos\varphi)^{n-2l}$$

geldt, dan komt het er slechts op aan te doen zien dat als

men de voorgaande, behalve voor n zelf, ook gebruikt voor alle in aanmerking komende waarden van $n - 2l$ en de uitkomsten substitueert in de laatste formule, waardoor men deelende door 2 verkrijgt:

$$\cos n\varphi = \sum_{0}^{\frac{n-1}{2}\text{of}\frac{n}{2}} \binom{n}{r} \cos(n-2r)\varphi + n \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}\text{of}\frac{n}{2}} \left\{ \frac{(-)^l}{l} \binom{n-l-1}{l-1} \sum_{0}^{\frac{n-2l-1}{2}\text{of}\frac{n-2l}{2}} \binom{n-2l}{r} \cos(n-2l-2r) \right.$$

alsdan dit laatste niet anders dan eene identiteit is. Met dat doel make men den coëfficiënt van een willekeurigen term $\cos(n-2r)\varphi$ in het ontwikkelde tweede lid op, waartoe in het tweede gedeelte van dat lid de notatie r voor den veranderlijken aanwijzer slechts te vervangen is door $r - l$, mits gelijktijdig lettende dat, daar de oorspronkelijke grensaanwijzing $r \gtreqless 0$ alsdan overgaat in $r - l \gtreqless 0$, ook de grens $l \leqq \frac{n-1}{2}$ of $\frac{n}{2}$ van de eerste sommatie in dat tweede gedeelte behoort ingekort te worden tot $l \leqq r$. Zoodoende verkrijgt men dus voor den volledigen coëfficiënt van $\cos(n-2r)\varphi$ de waarde:

$$\binom{n}{r} + n \sum_{1}^{r} \frac{(-)^l}{l} \binom{n-l-1}{l-1} \binom{n-2l}{r-l} =$$

$$= \frac{n}{r} \left\{ \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \sum_{1}^{r} (-)^l \frac{r!}{(r-1)!} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{(n-l-1)!}{(l-1)!(n-2l)!} \cdot \frac{(n-2l)!}{(r-l)!(n-r-l)!} \right.$$

$$= \frac{n}{r} \left\{ \binom{n-1}{r-1} + \sum_{1}^{r} (-)^l \binom{r}{l} \binom{n-l-1}{r-1} \right\} = \frac{n}{r} \sum_{0}^{r} (-)^l \binom{r}{l} \binom{n-l-1}{r-1},$$

dat is (vergelijk de vroegere afleiding, in het geval van $n = 1$, van afgebroken terugloopende betrekkingen uit (4_l^*) en (4_i^{**})): $\frac{n}{r} \Delta^r \binom{n-l-1}{r-1} = \frac{n}{r} \Delta^{r-1} \binom{n-l-2}{r-2} =$

$$= \frac{n}{r} \Delta^{r-2} \binom{n-l-3}{r-3} = \text{enz.} = \frac{n}{r} \Delta \binom{n-l-r}{0} = \frac{n}{r} \Delta 1 = 0.$$

Alle termen in het ontwikkelde tweede lid der te bewijzen identiteit komen dus werkelijk te verdwijnen — en deze uitspraak lijdt ook geene uitzondering voor den door $r = \frac{n}{2}$ bepaalden laatsten term in het geval van n even, daar diens coëfficiënt zoowel in het eerste als in het tweede gedeelte van het tweede lid der identiteit moet gehalveerd worden — behoudens alleen, zooals behoort, dat de door $r = 0$ bepaalde eerste term, dat is $\cos n\varphi$, waartoe het tweede gedeelte van het tweede lid wegens $l \gtreqless 1$ niet kan bijdragen, tot coëfficiënt verkrijgt $\binom{n}{0}$, dat is de eenheid.

Het vorenstaande is meer eene verificatie dan eene regtstreeksche afleiding van de formule voor $2\cos n\varphi$ uit die voor $(2\cos\varphi)^n$. Evenwel zou het weinig moeite kosten om, de ontwikkeling van $2\cos n\varphi$ volgens de afdalende magten van $2\cos\varphi$ met onbepaalde coëfficiënten nederschrijvende, de bewerking zoodanige wijziging te doen ondergaan dat de waarden dier coëfficiënten achtervolgens uit elkander te voorschijn komen.

Op overeenkomstige wijze, of ook door de voor $2\cos n\varphi$ gevonden formule te differentiëren volgens φ, kan de formule $\sin n\varphi = \sin\varphi \sum_{0}^{\frac{n-1}{2}\text{ of }\frac{n-2}{2}}{}' (-)^l \binom{n-l-1}{l} (2\cos\varphi)^{n-2l-1}$ worden opgemaakt waarvan vroeger ter zake van vergelijking (17) sprake was. En was men omgekeerd met deze laatste formule begonnen, dan zou daaruit, niet alleen door differentiatie, maar ook, hetzij door $2\cos n\varphi = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}$, waarbij te letten op $\binom{n-l}{l} + \binom{n-l-1}{l-1} = \frac{n}{l}\binom{n-l-1}{l-1}$, hetzij door $2\cos n\varphi = \frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi \,.\, 2\cos\varphi} - \frac{\sin(n-2)\varphi}{\sin\varphi \,.\, 2\cos\varphi}$, waarbij te letten op $\binom{n-l+1}{l} - \binom{n-l-1}{l-2} = \frac{n}{l}\binom{n-l-1}{l-1}$, de formule voor $2\cos n\varphi$ weder kunnen worden teruggevonden.

Delft, Junij 1880.

NASCHRIFT.

Wij zullen te dezer plaatse nog een paar voorbeelden van terugloopende betrekkingen tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten aanhalen, die wel weder als boven in het geval van $n = 1$ al die coëfficiënten in volgorde bevatten, maar zich toch van al de vroeger medegedeelde betrekkingen onderscheiden doordien zij met teekens zijn aangedaan die niet zooals toen telkens, doch thans slechts om den anderen term, afwisselen. Indien men namelijk in de voor willekeurige α en β geldende identiteit:

$$\{sin(\alpha+\beta)x+sin(\alpha-\beta)x\}.\frac{1}{2}cotax=\frac{1}{2}\{cos(\alpha+\beta)x+cos(\alpha-\beta)x\}$$

bij ontwikkeling de coëfficiënten der gelijknamige magten van x gelijk stelt en daarna in de alsdan komende algemeene betrekking neemt $\alpha = 1$ en $\beta = i$, komt men neder op:

$$\text{voor } q \text{ oneven}: \sum_1^q \begin{cases} (r \text{ oneven})(-)^{\frac{r-1}{2}} \\ (r \text{ even}) \quad (-)^{\frac{r}{2}} \end{cases} \binom{2q+1}{2r} 2^r B_{2r-1} = 1,$$

$$\text{en voor } q \text{ even}: \sum_1^q \begin{cases} (r \text{ oneven})(-)^{\frac{r-1}{2}} \\ (r \text{ even}) \quad (-)^{\frac{r-2}{2}} \end{cases} \binom{2q+1}{2r} 2^{r-1} B_{2r-1} = q;$$

deze zijn de beide bedoelde betrekkingen.

Dezelfde bewerking toegepast op de identiteit:

$$\{cos(\alpha+\beta)x-cos(\alpha-\beta)x\}.\frac{1}{2}cot\alpha x=-\frac{1}{2}\{sin(\alpha+\beta)x-sin(\alpha-\beta)x\}$$

geeft daarentegen zooals te voorzien is de vroegere betrekkingen (4″ voor $n=2$) terug. Behalve de twee voornoemde identiteiten kan men evenzoo behandelen de beide daaruit door verwisseling van α en β voortvloeijende. Neemt men dan in alle vier, voor willekeurige φ, $\alpha = cos\,\varphi$ en $\beta = i\,sin\,\varphi$, dan worden nog vier terugloopende betrekkingen met goniometrische coëfficiënten gevonden, welke betrekkingen, uithoofde de vier oorspronkelijke homogeen zijn in α en β en daarin dus α en β steeds door $\alpha^2-\beta^2=1$ verbonden gedacht kunnen worden, denzelfden graad van algemeenheid bezitten als deze oorspronkelijke; als voorbeeld moge hier alleen de eerste van deze vier betrekkingen, namelijk:

$$\sum_{1}^{r}(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r}(2\,cos\,\varphi)^{2r}\,cos\,(2q-2r+1)\varphi\,.\,B_{2r-1}=$$
$$=2q\,cos\,\varphi\,cos\,2q\varphi+sin\,\varphi\,sin\,2q\varphi\,,$$

worden vermeld.

Soortgelijke betrekkingen als de boven in de eerste plaats genoemde, maar iets meer zamengesteld, zijn ook voor $\alpha=1$ en $\beta=i$ te vinden uit de identiteit:

$$\{sin\,(\alpha+\beta)\,x+sin\,(\alpha-\beta)\,x\}\,.\,\frac{1}{2}\,cot\,\frac{\alpha x}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\{2\,cos\,\beta x+cos\,(\alpha+\beta)\,x+cos\,(\alpha-\beta)\,x\}\,.$$

En eindelijk kan men in de betrekking in α en β, afgeleid uit de eerst aangehaalde identiteit, deze β achtervolgens vervangen door bijv. $\beta+\gamma$ en $\beta-\gamma$ en dan de som en het verschil der uitkomsten nemen, terwijl dezelfde bewerking ook op de tweede aangehaalde identiteit is toe te passen: zoodoende komen vier terugloopende betrekkingen waarin de

coëfficiënten op regelmatige wijze van drie willekeurige grootheden α, β en γ afhangen en die bijv. door, uit $\omega^3 - 1 = 0$, te nemen $\alpha = 1$, $\beta = \omega$ en $\gamma = \omega^2$ soortgelijke beteekenis verkrijgen als de zoo straks besprokene voor twee grootheden $\alpha = 1$ en $\beta = i$.

Al het hier opgemerkte is ook op de coëfficiënten T, C en E van toepassing te maken.

Delft, December 1880.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKWERKEN

DOOR DE

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

ONTVANGEN EN AANGEKOCHT.

1880—1881.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND APRIL 1880.

Bouwkundige bijdragen, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der bouwkunst. Amsterdam 1880. Deel XXV. St. 4. 4°.

Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam 1880. Deel VI. St. 2. 8°.

Catalogus van handschriften uit de bibliotheek van wijlen den hoogleeraar WILLEM MOLL, door Curatoren der Universiteit van Amsterdam aangekocht . . . . voor de Bibliotheek der Universiteit van Amsterdam. 1880. 8°.

Jaarboek der Maatschappij „tot nut van 't algemeen" voor 1878—1879. Amsterdam 1879. roy. 8°.

J. A. C. OUDEMANS Kan in tropische gewesten droogte,

en daaruit volgende hongersnood voorspeld, of de waarschijnlijkheid er van aangenomen worden? Amsterdam 1880. 8°.

De Navorscher. Amsterdam 1880. Nieuwe Serie. 13e Jaarg. N°. 3. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1880. 4e Reeks. Deel IV. Maart. 8°.

Tijdschrift der Nederlandsche dierkundige vereeniging. Leiden 1880. Deel V. Afl. 1—2. 8°.

W. F. R. SURINGAR. Rafflesia Hasseltii. 1880. roy. 8°. Met platen.

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische vereeniging. 's Gravenhage 1880. Deel XXIII. Afl. 2. 8°.

Jaarboek van de Koninklijke Nederlandsche Zeemagt 1878—1879. 's Gravenhage 1880. 8°.

De Vrije Fries. Mengelingen uitgegeven door het Friesch Genootschap van geschied, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1880. 3e Reeks. Deel II. Afl. 3. 8°.

E. VERWIJS. Jacob van Maerlant's strophische gedichten. Groningen 1879. 8°.

CH. M. SCHOLS. Landmeten en waterpassen. Met Atlas. Uitgegeven door de Koninklijke Militaire Akademie. Breda 1879. 8°.

Verslag der Staats-Commissie, benoemd bij koninklijk besluit van 21 April 1878, N°. 10, tot het instellen van

een onderzoek omtrent de verbetering van het Zwolsche diep. 's Gravenhage 1879. 4°.

Verzamalingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee en Wadden, enz., waargenomen in de maanden Augustus en September 1879. 's Gravenhage 1879. fol.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Februarij. 's Gravenhage 1880. fol.

BELGIË.

Annuaire de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1880. 46e Année. 8°.

Mémoires couronnés et autres mémoires de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. Tome V. Fasc. 4. 8°.

C. MALAISE. Description de gites fossilifères devoniens et d'affleurements du terrain crétacé. Bruxelles 1879. 4°.

Jaarboek van het Willems-fonds voor 1880. Gent 1880. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1880. Tome XC. N°. 11—14. 4°.

Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris 1878. Tome XXXIX et XLI. 4°.

Inhoud. Tome XXXIX:

E. CHEVREUL. D'une erreur de raisonnement très-fréquente dans les sciences du ressort de la philosophie naturelle qui concernent le concret expliquée par les derniers écrits.

E. CHEVREUL. Études des procédés de l'esprit humain dans la recherche de l'inconnu à l'aide de l'observation et de l'expérience et du moyen de savoir s'il a trouvé l'erreur ou la vérité.

———— Résumé d'une histoire de la matière depuis les philosophes grecs jusqu'à Lavoisier inclusivement.

Inhoud, Tome XLI:

BECQUEREL. Mémoire sur la mesure des affinités, en prenant pour bases les forces électro-motrices.

———— Note sur les actions chimiques produites avec l'appareil d'induction de Ruhmkorff.

———— Nouvelles recherches sur les réductions métalliques par les actions électro-capillaires.

———— Mémoire sur les forces électro-motrices produites au contact de deux liquides séparés par des diaphragmes capillaires de nature quelconque.

———— Mémoire sur le transport de certains sels par les décharges électriques.

———— et EDM. BECQUEREL. Mémoire sur la température de l'air à la surface du sol, et de la terre jusqu'a 36 mètres de profondeur ; ainsi que sur la température de deux sols semblables, l'un dénudé, l'autre couvert de gazon, observée au Muséum avec le thermomètre électrique, pendant les années 1875, 1876 et 1877.

———— Mémoires sur les actions électro-capillaires et l'action de différents liquides sur la peau.

E. CHEVREUL. Complément des études sur la vision des couleurs. De l'influence exercée sur la vision par des objets colorés se mouvant circulairement autour d'un axe perpendiculaire à leur plan, quand on les observe comparativement avec des objets en repos identiques aux premiers.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris 1879. 2e Série. Tome XXVI. 4°.

Inhoud:

MC. CORNU. Études sur le phylloxera vastatrix.

HALPHEN. Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes.

DUCLAUX. Etudes sur la nouvelle maladie de la vigne dans le sud-est de la France.

FOUQUÉ. Recherches minéralogiques et géologiques sur les laves des dijkes de Théra.

BERTIN. Observations de roulis et de tangage faites avec l'oscillographe double à bord de divers bâtiments.

Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres de l'Institut de France. Paris 1877—1879. Tome XXV. Partie 1. Tome XXVII. Partie 1. Tome XXIX. Partie 1—2. 4°.

Inhoud. Tome XXV. Part. 1. XXVII. Part. 1. Tome XXIX. Part. 1:

Histoire de l'Académie des inscriptions et belles lettres pendant les années 1861—1878.

Tome XXIX. Part. 2:

TH. H. MARTIN. Comment Homère s'orientait. Explications fort simples substituées à des fables trop savantes.

———— Mémoire sur les hypothèses astronomiques des plus anciens philosophes de la Grèce étrangers à la notion de la sphéricité de la terre.

V. DURUY. Mémoire sur la formation historique des deux classes de citoyens romains désignés dans les Pandectes sous les noms *d'honestiores* et *d'humiliores*.

———— Mémoire sur les tribuni militum a populo.

TH. H. MATIN. Histoire des hypothèses astronomiques grecques qui admettent la sphéricité de la terre.

B. HAURÉAU. Mémoire sur la vraie source des erreurs attribuées à David de Dinan.

DELOCHE. Dissertation sur une médaille d'or mérovingienne portant à la fois le nom gallo-romain et le nom plus récent d'une ville gauloise. Observations sur le changement de noms de villes dans la Gaule du IIIe au VIIe siècle.

Mémoires présentés par divers savants à l'Academie des inscriptions et belles-lettres de l'Institut de France. Paris 1878. 1e Série. *Sujets divers d'érudition*. Tome IX. 4°.

Inhoud:

ROSTOU. Recherches sur le calendrier macédonien en Égypte et sur la chronologie des Lagides.

P. CHABAS. Recherches sur les poids, mesures et monnaies des anciens Égyptiens.

———— Détermination d'une date certaine dans le règne d'un roi de l'ancien empire, en Égypte.

TISSOT. Recherches sur la géographie comparée de la Mauritanie Tingitane.
P. FOUCART. Mémoire sur les colonies athéniennes au cinquième et au quatrième siècle.

Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale et autres bibliothèques, publiés par l'Institut national de France. Paris 1877—1879. Tome XXIII. Part. 1. XXVI. Part. 2. XXVII. Part. 2. XXVIII. Part. 2. 4°.

Inhoud, Tome XXIII. Part. 1:

IBN EL-BEÏTHAR. Traité des simples. Tome I.

Tome XXVI, Part. 2:

J. PROU. La chirobaliste d'héron d'Alexandrie.

Tome XXVII. Part. 2:

HAURÉAU. Notice sur les oeuvres authentiques ou supposées de Jean de Garlande.
L. DELISLE. Notice sur cinq manuscrits de la Bibliothèque Nationale et sur un manuscrit de la Bibliothèque de Bordeaux, contenant des recueils épistolaires de Bérard de Naples.
——— Notice sur les manuscrits de Bernard Gui.
A. BOUCHERIE. Note additionnelle sur les Ἑρμηνεύματα et la Καθημερινὴ ὁμιλία de Julius Pollux.

Tome XXVIII. Part. 2:

N. DE WAILLY. Notice sur les actes en langue vulgaire du XIIIe siècle contenus dans la collection de Lorraine, à la Bibliothèque Nationale.
HAURÉAU. Notice sur les mélanges poétiques d'Hildebert de Lavardin.

Recueil de mémoires, rapports et documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le soleil. Paris 1876—1878. Tome I. Partie 1—2 et Supplément à la 2e partie. Tome II. Partie 1. 4°.

Bulletin de l'Academie de médecine. Paris 1880. 2e Série. Tome IX. N°. 12—15. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1880. Tome VIII. N°. 1—2. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1880. Vol. V. N°. 183—186. 4°.

V. DURUY. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des Barbares. Paris 1880. Livr. 108—111. roy. 8°.

Recueil de mémoires de médecine, de chirurgie et de pharmacie militaires publié par ordre du Ministre de la guerre. Paris 1879. 3e Série. Tome XXXV. 8°.

Mémoires de la Société des sciences de l'agriculture et des arts de Lille. 1877—1879. 3e Série. Tome XIV. 4e Série. Tome III—VI. 8°.

Inhoud, Vol. XIV:

P. RENARD. Études de thermométrie clinique.

Tome III:

B. CORENWINDER. Recherches chimiques sur les productions des pays tropicaux.

ED. VAN HENDE. Supplément à la numismatique lilloise.

DELETOMBE. La soeur de lait.

A. TERQUEM. Vernis destiné à faciliter l'écriture sur le verre.

CASATI. Faïence de Diruta.

CH. CASATI. Lettres royaux et lettres missives inédites, notamment de Louis XI, Louis XII, François Ier, Charles Quint, Marie-Stuart, Cathérine de Médicis, Henri IV, Bianco Capello, Sixte-Quint, etc. relatives aux affaires de France et d'Italie.

J. HOUDOY. Études artistiques. Artistes inconnues des XIVe, XVe et XVIe siècles.

B. CORENWINDER. Recherches chimiques sur la végétation. Fonctions des feuilles. Origine du carbone.

CH. VIOLLETTE. Mémoire sur la distribution u sucre et des principes minéraux dans la betterave.

A. TERQUEM. Emploi d'une glace argentée comme chambre claire.

FAIDHERBE. Le Zénaga des tribus sénégalaises. Contribution à l'étude de la langue berbère.

SCRIVE. Communication sur le gisement de cuivre argentifère des mines de la Prugne et Charrier, dans le département de l'Allier.

A. TERQUEM. Sur les courbes dues à la combinaison de deux mouvements vibratoires perpendiculaires.

Tome IV :

L. DÉPRET. Ch. Lamb, De l'humour littéraire en Angleterre.

FAIDHERBE. Le Zénaga des tribus sénégalaises.

HOUZÉ DE L'AULNOIT. Étude physiologique et expérimentale sur l'asphyxie par submersion et sur les avantages de l'emploi de la sonde œsophagienne dans le traitement des noyés.

RAILLARD. Notice historique sur le nivellement général du département du Nord et sur la carte au 40 millième, annexe de cette opération.

TELLIER. Note sur les écoles libres des mines de Liévin (Pas-de-Calais).

DUTILLEUL. Fables.

B. CORENWINDER et G. CONTAMINE. Recherches sur l'acide phosphorique des terres arables.

ED. ROCHE. Remarques sur les satellites de Mars.

A. TERQUEM. Sur la production en projection des courbes de Lissajous à l'aide de diapasons.

———— Expérience de démonstration pour l'interférence des sons.

A. DUPUIS. Note sur Antoinette Dourignon.

F. KUHLMANN. Condensation des vapeurs acides et expériences sur le tirage des cheminées.

Tome V :

H. TRANNIN. Photométrie. Mesure des intensités relatives des diverses radiations constitutives des sources lumineuses.

E. DUVILLIER. Sur la présence de l'acide phosphorique dans toute la série géologique.

———— Méthode pour retirer le platine des chloro-platinates.

L. BRETON. Étude stratigraphique du terrain houiller d'Auchy-au-Bois.

E. GRÉGOIRE. Étude sur le travail mécanique de la filature du lin.

G. DE SIRVEY. Martyre et Délivrance, poëme dramatique national.

Tome VI :

J. BOUSSINESQ. Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale.

TELLIEZ. Des origines de la propriété.

PUTON. Synopsis des Hémiptères-Hétéroptères de France, de la famille des Lygaeides.

V. HENRY. Les trois racines du verbe être, dans les langues indo-européennes.

L. D'HENRY. Sténographie usuelle ou écriture phonétique complète et rapide de tous les sons ou articulations de la langue française.

B. CORENWINDER. Recherches sur la composition chimique et les fonctions des feuilles.

Bulletin de la Société academique de Brest. 1879. 2e Série. Tome VI. Fasc. 1. 8°.

Mémoires de l'Académie de Stanislas. Nancy 1879. 4e Série. Tome XI. 8°.

Mémoires de la Société des antiquaires de la Morinie. St. Omer 1879. Tome XVI. 1e Partie. 8°.

Académie des sciences, belles-lettres et arts de Savoie. Documents relatifs au prieuré et à la vallée de Chamonix. Chambéry 1879. Vol. III. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1880. Vol. XL. N°. 5. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1880. New Series. Vol. II. N°. 4. 8°.

Journal of the Anthropological Institute of Great-Britain and Ireland. London 1880. Vol. IX. N°. 3. 8°.

Report on temperatures during the winter of 1878—79 at the Royal botanic garden, Edinburgh. 1880. 8°.

OOSTENRIJK.

Urkundenbuch des Herzogthums Steiermark, herausgegeben vom Historischen Vereine für Steiermark. Graz 1879. Band II. 8°.

Viestnik hrvatskoga arkeologičkoga druztva. Zagrebu 1880. Godina II. Br. 2. 8°.

DUITSCHLAND.

R. VIRCHOW. Archiv für pathologische Anatomie und Phy-

siologie und für klinische Medicin. Berlin 1880. Band LXXIX. Heft 2—3. Band LXXX. Heft 1. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1880. Jahrg. 1879. Heft 10—11. Oblong.

Verhandlungen der kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akademie der Naturforscher. Dresden-Halle 1877—1878. Band XXXIX—XL. fol.

Inhoud, Band XXXIX:

E. v. FREYHOLD. Ueber Blüthenbau und Verstäubungsfolge bei Tropaeolum pentaphyllum.
E. GREEF. Untersuchungen über die Alciopiden.
A. ENGLER. Vergleichende Untersuchungen über die morphologischen Verhältnisse der Araceae.
B. PETER. Untersuchung des Vorüberganges der Venus vor der Sonnenscheibe im Jahre 1882.
H. KNOBLAUCH. Ueber das Verhalten der Metalle gegen die strahlende Wärme.
H. ENGELHARDT. Ueber die fossilen Pflanzen des Süsswassersandsteins von Tschernowitz.

Band XL:

J. REINKE. Entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen über die Dictyotaceen des Golfs von Neapel.
——— — Entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen über die Cutleriaceen des Golfs von Neapel.
H. CONWENTZ. Ueber aufgelösste und durchwachsene Himbeerblüthen.
C. OCHSENIUS. Beiträge zur Erklärung der Bildung von Steinsalzlagern und ihrer Mutterlaugensalze
G. BERTHOLD. Untersuchungen über die Verzweigung einiger Süsswasseralgen.
R. FRANZ. Ueber die diamagnetische Polarität.
W. ZOPF. Die Conidienfrüchte von Fumago.
CL. WINKLER. Die Untersuchung des Eisenmeteorits von Rittersgrün.
E. GEINITZ. Das Erdbeben von Iquique am 9 Mei 1877 und die durch dasselbe verursachte Erdbebenfluth im grossen Ocean.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais. Leop.-Carol.-deutschen Akademie der Naturforscher. Dresden-Halle 1876—1879. Heft 12—15. fol.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1880. Jahrg. 3. N°. 52. 8°.

Der Zoologische Garten, herausgegeben von der Neuen Zoologischen Gesellschaft. Frankfurt a/M. 1879. Jahrg. 20. N°. 7—12. 8°.

PETERMANN's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1880. Band XXVI. N°. 3. Ergänzungsheft N°. 60. 4°.

Denkschriften der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. 1880. Band II. Heft 4. 4°.

Inhoud:

E. E. SCHMID. Die quarzfreien Porphyre des centralen Thüringer Waldgebirges und ihre Begleiter.

W. BLASIUS. Oeffentliche Anstalten für Naturgeschichte und Alterthumskunde in Holland und dem nordwestlichstem Theile von Deutschland. Braunschweig 1880. 8°.

F. SUSEMIHL. De recognoscendis ethicis nicomacheis. Dissertatio II. Greifswald 1879. 4°.

U. DE WILAMOWITZ-MOELLENDORF. Commentariolum grammaticum. Greifswald 1879. 4°.

Verzeichnisz der Vorlesungen welche im Jahre 1879—80 an der kön. Universität Greifswald gehalten werden sollen. 4°.

R. WILCZEK. Ueber einseitige, fortschreitende Gesichtsatrophie. Greifswald 1879. 8°.

M. MORITZ. Ueber einige Präparate des Gelsemium sempervirens. Greifswald 1879. 8°.

J. GÓRNY. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Resorptionsfähigkeit granulirender Flächen. Greifswald 1879. 8°.

R. KOEHNE. Ueber Scheiden- und Uterusvorfälle und deren Radikalheilung. Greifswald 1879. 8°.

TH. WOLDT. Statistischer Beitrag zur Aetiologie und Symptomatologie der Leucaemie. Greifswald 1879. 8°.

A. OZEGOWSKI. Ueber die Folgen der doppelseitigen Vagusdurchschneidung bei Tauben. Greifswald 1879. 8°.

B. S. GRYGLEWICZ. Versuche über die Einwirkung chemischer Reizmittel auf die Gelenke unter antiseptischen Cautelen. Greifswald 1879. 8°.

J. L. CZERWINSKI. Beiträge zur Pseudoleukaemie. Greifswald 1879. 8°.

B. SCHMIDT. Beobachtungen über Psychosen nach Kopfverletzungen. Greifswald 1879. 8°.

M. SALENZ. Zur Wirkung des oleum Eucalypti Globuli. Greifswald 1879. 8°.

R. BODENSTEIN. Klinische Beobachtungen bei einigen in Sommer 1878 in der Greifswalder medicinischen Klinik vorgekommenen Fällen von typhus exanthematicus. Greifswald 1879. 8°.

H. FALCH. Fremde Körper in der Orbita. Greifswald 1879. 8°.

TH. BIEL. Einige Versuche über Milchinfusionen beim Hunde. Greifswald 1879. 8°.

W. MÖLLENEY. Zur Symptomatologie und Statistik der Trichinose nebst einigen therapeutischen Versuchen. Greifswald 1879. 8°.

J. HIRSCH. Zur Symptomatologie und Therapie des Bandwurmleidens. Greifswald 1879. 8°.

TH. THIELMANN. Ueber Hypopyon-Keratitis. Greifswald 1879. 8°.

R. GIERICH. Ueber Pleuritis exsudativa im Kindesalter. Greifswald 1879. 8°.

O. BRINKMANN. Zur Symptomatologie des malleus acutus. Greifswald 1879. 8°.

F. KLOSS. Ueber Hämorrhagische Diathese bei Leukämie und dadurch contraindicirte Splenotomie. Greifswald 1879 8°.

A. BUCHTERKIRCH. Beiträge zur Pathologie und Therapie des Lungenechinococcus. Greifswald 1879. 8°.

J. SCHULTE. Der Selbstmord als ein Symptom von Geistesstörung. Greifswald 1879. 8°.

F. A. REINSTADLER. Ueber Impftuberculose. Saarlouis 1879. 8°.

M. OETTE. Ueber den Einfluss gewisser Fieber auf den leukaemischen Process. Greifswald 1879. 8°.

E. PFLEGER. Untersuchungen über die Wärmeabgabe der Haut im normalen und krankhaften Zustande. Greifswald 1879. 8°.

J. SPIEGEL. Beitrag zur Aetiologie und Symptomatologie der hepatitis interstitialis. Greifswald 1879. 8°.

J. M. DE CASTRO. Die progressive pernicioese Anaemie. Greifswald 1879. 8°.

C. BRUNNEMANN. Ueber eine Azoxysulfobenzolsäure und einige ihrer Derivate. Greifswald 1879. 8°.

P. ALTMANN. Ueber den quantitativen Unterschied der Affinitäten von Brom und Chlor in den Wasserstoffsäuren zu Silber. Greifswald 1879. 8°.

J. CHRIST. De publicis populi atheniensis rationibus saeculo A Ch, quinto et quarto. Gryphiswaldiae 1879. 8°.

C. SCHMIDT. De Apophthegmatum quae sub Plutarchi nomine feruntur collectionibus. Gryphiswaldiae 1879. 8°.

F. TANK. De tristibus Ovidii recensendis. Stettini 1879. 8°.

E. MAASS. De sibyllarum indicibus. Gryphiswaldiae 1879. 8°.

F. GIESEBRECHT. Der Wendepunkt des Buches Hiob. Berlin 1879. 8°.

R. MARSSON. Die Natur der Vertragsofferte. Greifswald 1879. 8°.

Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe der kön. b. Akademie der Wissenschaften. München 1879. Heft 4. 8°.

Sitzungsberichte der philos.-philol. und historischen Classe der kön. b. Akademie der Wissenschaften. München 1879. Band II. Heft 2. 8°.

E. STOEBER. Die römischen Grundsteuervermessungen. Mit einem Vorwort von C. M. BAUERNFEIND. München 1877. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1879. Memorie della classe de scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 3. Vol. III—IV. 4°.

Inhoud, Vol. III:

MORO. Le foci del Tevere.
COSSA. Sulla diffusione del Cerio, del Lantano e del Didimio.
BATTAGLINI. Sui complessi di secondo grado.
GUARESCHI. L'acido etilidendisolforico.
GOLPPERT. Sull'ambra di Sicilia e sugli oggetti in essa rinchiusi.
BECHI. Su la composizione delle roccie della miniera di Montecatini.
CHIZZONI. Sulla superficie e sulle linee che si ottengono come luogo o come inviluppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti di due curve omografiche piane.
HERZEN. La condizione fisica della coscienza.
CAPELLINI. Gli strati a congerie e le marne compatte mioceniche.
SELMI. Di un processo delicato e sicuro per la ricerca tossicologica dell' arsenico; e di alcune osservazioni sul detto metalloide.
TOMMASI-CRUDELI. Della distribuzione delle acque nel sottosuolo dell' Agro romano e della sua influenza nella produzione della malaria.
PATERNO E OGLIALORO. Nuovi studi sulla Picrotossina.
CAPELLINI. Balenottera fossile delle Colombaie presso Volterra.
MAYER. Sopra certi organi di senso nelle antenne dei Ditteri.
LOVISATO. Sulle chinzigiti della Calabria.
SAVIOTTI. Sopra un nuovo metodo generale di composizione delle forze e sua estensione al calcolo delle travature reticolari.
SELMI. Delle difficoltà di ottenere perfettamente privo di arsenico l'acido solforico, del modo can che riusciroi e di altre cose che risguardano l'arsenico.
BELLONCI. Richerche intorno all' intima tessitura del cervello dei teleostei.
CASORATI. Nota concernente la teoria delle soluzioni singolari delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado.
DE SAINT-ROBERT. Du mouvement d'un pendule simple suspendu dans une voiture de chemin de fer.
PANEBIANCO. Sulla forma cristallina di alcune sostanze della serie aromatica.
CANTONI. Sulla teoria della pila voltiana.
PANTANELLI. Sugli strati miocenici del Casino (Siena) e considerazioni sul miocene superiore.
LOVISATO. Nuovi oggetti litici della Calabria.
CINTOLESI. Ricerche e considerazione teoriche intorno alle immagini accidentali o soggettive.
EMERY. Contribuzioni all' Ittiologia.
MORIGGIA. Tre embrioni di pulcino in un blastoderma unico.
BECHI. Nuove ricerche del boro e del vanadio.
BARETTI. Studi geologici sulle Alpi Graie settentrionali.

Vol. IV:

GUIDI. Sulla determinazione grafica delle forze interne negli archi metallici.

PICCONE. Catalogo delle alghe raccolte durante le crociere del cutter violante e specialmente in alcune piccole isole mediterranee.

SELMI. Dell' influenza di alcuni sali nell' accelerare o ritardare la reazione tra lo zinco a l'acido solforico.

LA VALLE. Studio cristallografico di alcuni corpi della serie aromatica preparati dal prof. KÖRNER.

VILLARI. Richerche sulle leggi termiche e galvanometriche delle scintille elettriche prodotte dalle scariche complete, incomplete e parziale dei condensatori.

SELMI. Alcaloidi venefici e sostansa amiloide dell' albumina in putrefazione.

ALESSANDRI. Nuovi processi d'imbiancamento delle fibre tessili vegetali e animali e in special modo delle lane meccaniche.

ROSSETTI. Sul potere assorbente, sul potere emissivo termico delle fiame e sulla temperatura dell' arco voltaico.

RICCARDI. Studi intorno ad alcuni crani Araucanos e Pampas appartenenti et Museo nazionale d'antropologia e de etnologia in Firenze.

FERRARIS. Teoremi sulla distribuzione delle correnti elettriche costanti.

KLEBS E TOMMASI-CRUDELI. Studi sulla natura della malaria.

BETOCCHI. Effemeridi e statistica del fiume tevere prima e dopo la confluenza dell' aniene, e dello stesso fiume aniene durante l'anno 1878.

ASCOLI. Sulla rappresentabilita di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica.

LANCIANI. Di alcune opere di risanamento dell' Agro romano eseguite dagli antichi.

ZOJA. Ricerche anatomiche sull' appendice della glandola tiroidea.

DI TUCCI. Saggio di studi geologici sui peperini del lazio.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1879. Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche. Serie 3. Vol. III. 4°.

Inhoud:

FIORELLI. Notizie degli scavi di antichita.

MARIANO. Contro il libero scambio.

CARUTTI. Delle lettere inedite del principe Federico Cesi fondatore dell' Accademia dei Lincei.

MESSEDAGLIA. Sull' atlante di demografia italiana, pubblicato dalla direzione della statistica del regno,

GEFFROY. Marie Antoinette et Fersen.

CAETANI LOVATELLI ERSILIA. Di un antico musaico rappresentante una scena circense.

LUMBROSO. Ricerche Alessandrine.

———— Descrittori italiani dell' egitto e di Alessandria.

OUIDI. Della sede primitiva dei popoli semitici.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1880. Transunti. Serie 3. Vol. IV. Fasc. 4. 4°.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di scienze fisiche e naturali. Firenze 1877—1879. roy. 8°.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di filosofia e filologia. Firenze 1877—1879. roy. 8°.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di filosofia e filologia. Accademia orientale. Firenze 1877—1878. roy. 8°.

The fine arts in Florence. (Dr. Beggi's picture Gallery). 8°.

C. CODA. Quattrocente temi per esercizio d'immaginazione, di memoria e di lingua ad uso delle scuole classiche e tecniche. Torino 1878. 8°.

——— La filosofia dei "promessi sposi" di Alessandro Manzoni. Torino 1879. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Upsala Universitets fyrahundraärs jubelfest, September 1877. Stockholm 1879. roy. 8°.

RUSLAND.

Bulletin de l'Académie impériale des sciences. St. Pétersbourg 1880. Tome XXVI. N°. 1. fol.

NOORD-AMERIKA.

Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College, Cambridge, Mass. 1880. Vol. VI. N°. 3—4. 8°.

Jahres-Bericht des naturhistorischen Vereins von Wisconsin für das Jahr 1879 –80. Milwaukee 1880. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Vol. 5. N°. 1—26. fol.

AANGEKOCHT.

Journal des savants. Paris, Mars 1880. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1879. 2e Série. Tome III. Octobre. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1880. 5th Series. Vol. V. N°. 28. 8°.

The London, Edinburg and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1880. 5th Series. Vol. IX. N°. 56. 8°.

F. H. TROSCHEL. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1880. Jahrg. 46. Heft 2. 8°.

G. WIEDEMANN. Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1880. Neue Folge. Band IX. Heft 3. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Göttingen 1880. St. 7—8. Nachrichten. N°. 5. 8°.

Bibliothèque universelle et revue suisse. Genève 1880. Archives. 3e Période. Tome III. N°. 4. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND MEI 1880.

De Navorscher. Amsterdam 1880. Nieuwe Serie. 13e Jaarg. Afl. 4. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1879. N°. 11—12. 8°.

Nieuwe bijdragen voor rechtsgeleerdheid en wetgeving. Amsterdam 1879. Nieuwe Reeks. Deel V. Rechtsgeleerd bijblad. Nieuwe Reeks. Deel V. Afd. A—D. 8°.

Natuurkundige Verhandelingen der Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen. Haarlem 1880. 3de Verz. Deel IV. St. 1. 4°.

Inhoud:

C. K. HOFFMANN. Untersuchungen ueber den Bau und die Entwickelungsgeschichte der Hirudineen.

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles publiées par la Société hollandaise des sciences. Harlem 1880. Tome XV. Livr. 1—2. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1880. 4e Reeks. Deel IV. April. 8°.

Punten van beschrijving voor de 103de Algemeene Vergadering en het Congres der Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid op Dingsdag 13 Julij 1880 en volgende dagen in het Concerthuis te Groningen. 8°.

G. C. J. VOSMAER. The sponges of the Leyden Museum. (The family of the desmacidinae). 8°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het Kon. Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van N.-I. 's Gravenhage 1880. 4e Reeks. Deel IV. St. 1—2. 8°.

G. SCHLEGEL. Réponse aux critiques de l'uranographie chinoise. la Haye 1880. 8°.

SEPP's Nederlandsche insecten. 's Gravenhage 1880. 2e Serie. N°. 17—18. 4°.

Bijdragen voor vaderlandsche geschiedenis en oudheidkunde. 's Gravenhage 1880. Nieuwe Reeks. Deel X. St. 3—4. 8°.

Mededeelingen betreffende het zeewezen. 's Gravenhage 1880. Deel XXII. Afl. 4. 8°.

H. VAN HERWERDEN. Lapidum de dialecto attica testimonia. Traiecti ad Rh. 1880. 8°.

DAVID J. A. SAMOT. De verzekering op het leven, de eliminatie van het toeval. Rotterdam 1880. 8°.

——————— De beginselen der levensverzekeringwetenschap. (Overgedrukt uit het Nieuw Archief voor wiskunde). 8°.

Mededeelingen en berichten der Geldersche Maatschappij van landbouw. Zutphen 1880. 8°.

C. UBAGHS. Description géologique et paléontologique du sol du Limbourg. Ruremonde 1879. roy. 8°.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de Zeeuwsche

stroomen enz., waargenomen in de maand October 1879. 's Gravenhage 1879. fol.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Maart. 's Gravenhage 1880. Nieuwe Serie. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in N.-I., uitgegeven door de Ned. Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1880. Deel XXV. Afl. 1—3. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1880. 2e Série. Tome XLIX. N°. 3. 8°.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. Tome V. Fasc. 5. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. 3e Série. Tome XIV. N°. 3—4. 8°.

Annales de la Société malacologique. Bruxelles 1880. Tome IX. Fasc. 2. 8°.

Procès-Verbaux des séances de la Société malacologique de Belgique. Bruxelles 1879. 8°.

Préface du Tome II des Ordonnances des Pays-Bas Autrichiens. fol.

Coutumes des pays et comté de Flandre. Coutume du franc de Bruges. Tome II. Bruxelles 1879. 4°.

Procès-verbaux des séances de la Commission royale pour la publication des anciennes lois et ordonnances de la Belgique. Bruxelles 1879. Vol. VI. Cahier 7. 8°.

Texte explicatif au lévé géologique des planchettes d'Hoboken et de Contich. Bruxelles 1880. 8°. Avec 3 planches.

Exposé de la situation du royaume de 1861 à 1875, publié par le Ministre de l'Intérieur. Bruxelles 1880. Fasc. 5. 8°.

Annales de l'Observatoire royal de Bruxelles. 1879. 4°.

Mémoires de la Société royale des sciences de Liège. Bruxelles 1878. 2e Série. Tome VII—VIII. 8°.

Inhoud, Tome VII:

L. G. DE KONINCK. Recherches sur les fossiles paléozoïques de la Nouvelle-Galles du Sud (Australie).
M. V. IMSCHENETSKY. Note sur les équations aux dérivées partielles.
F. FOLIE. Eléments d'une théorie des faisceaux.

Tome VIII:

W. EICHHOFF. Ratio, descriptio, emendatio eorum tomicinorum.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. Anvers 1860—1865. Tome XVII. Livr. 2—4. 2e Série. Tome I. 8°.

Annuaire de l'Université catholique de Louvain. 44e Annee. 8°.

Revue catholique. Louvain 1879. Nouvelle Série. Tome XXI—XXII. 8°.

G. DOBBELSTEIN. De carmine christiano codicis parisini 8084 contra fautores paganae superstitiones ultimos. Lovanii 1879. 8°.

M. B. G. FLINK. De concordatis dissertatio canonica. Lovanii 1879. 8°.

P. TRIBOUL D'ARGENTAN. De l'intoxication saturnine. Louvain 1878. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1880. Tome XC. N°. 15—20. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1880. 2e Série. Tome IX. N°. 16—20. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1880. Tome VIII. N°. 3. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1879—1880. Tome XXVI. Comptes rendus N°. 3. Revue Bibliogr. E. Tome XXVII. Comptes rendus N°. 1. 8°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1880. 3e Année. N°. 4—5. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1880. Vol. V. N°. 187—191. 4°.

V. DURUY. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l invasion des barbares. Paris 1880. Livr. 112—116. roy 8°.

A. PASSIER. Les échanges internationaux littéraires et scientifiques. Paris 1880. 8°.

Recueil de l'Académie de législation de Toulouse. 1878—79. Tome XXVII. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Memoirs of the Royal Astronomical Society. Londen 1879. Vol. XLI. 4°.

Inhoud:

A. G. BANYARD. Observations made during total solar eclipses.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1880. Vol. XL. N°. 6. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1880. New Series. Vol. II. N°. 5. 8°.

Transactions of the Zoological Society. London 1880. Vol. X. Part. 13. Vol. XI. Part. 1. 4°.

Vol. X. 13:

P. L. SCLATER. Supplementary notes on the curassows now or lately living in the Society's Gardens.

Inhoud. Vol. XI, 1:

A. H. GARROD. On the brain and other parts of the hippopotamus.

W. H. FLOWER. On the external characters of two species of british dolphins.

OWEN. Description of a portion of mandible and teeth of a large extinct kangaroo from ancient fluviatile drift, Queensland.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society. London 1880. Part. IV. 8°.

List of the vertebrated animals now or lately living in the gardens of the Zoological Society. London 1879. 1st Supplement. 8°.

Astronomical observations made at the Observatory of Cambridge for the years 1861—1865. Cambridge 1879. Vol. XXI. 4°.

Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVIII. Part. 3. Vol. XXIX. Part. 1. 4°.

Inhoud. Vol. XXVIII. 3:

FLEEMING JENKIN. On the application of graphic methods to the determination of the efficiency of machinery. Part second.
TAIT. Thermal and electric conductivity.
W. THOMSON. On thermodynamic motivity.
FLEEMING JENKIN and J. A. EWING. On the harmonic analysis of certain vowel sounds.
P. SMYTH. Colour, in practical astronomy, spectroscopically examined.

Vol. XXIX. 1:

HEDDLE. Chapters on the mineralogy of Scotland.
TH. MUIR. General theorems on determinants.
J. B. HAYCRAFT. On the physiological results of temperature variations.
W. RUTHERFORD. On the physiological actions of drugs on the secretion of bile.
C. CARR ROBINSON. On some new bases of the leucoline series.
J. BLYTH. On the transmission of sound by loose electrical contact.
P. SMITH. The solar spectrum in 1877—78, with some practical idea of its probable temperature of origination.
R. H. TRAQUAIR. On the structure and affinities of the Platysomidae.
M. WATSON and A. H. YOUNG. The anatomy of the northern beluga.
GEIKIE. On the carboniferous volcanic rocks of the basin of the Firth of Forth; their structure in the field and unter the microscope.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1878—79. Vol. X. 8°.

Transactions aud proceedings of the Botanical Society. Edinburgh 1879. Vol. XIII. Part. 3. 8°.

OOSTENRIJK.

Verhandlungen der kais.-kön. Zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 1880. Band XXIX. 8°.

Das chemische Institut der k.k. Universität Graz, herausgegeben von dem Naturwissenschaftlichen Vereine für Steiermark. Wien 1880. 4°.

Mittheilungen des Naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark. Graz 1880. Jahrg. 1879. 8°.

Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn. 1879. Band XVII. 8°.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k.k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1879. 4°.

J. B. FELFY. Opuscula graeca. Budapestini 1880. roy. 8°.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin Januar 1880. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1880. Jahrg. 1879. Heft 12. Oblong.

C. G. GIEBEL. Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Berlin 1879. 3e Folge. Band IV. 8°.

MAX COHN. Beiträge zur Bearbeitung des römischen Rechts. Berlin 1880. Band I. Heft 2. 8°.

Abhandlungen der mathem. phys. Classe der kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1880. Band XII. Heft 4. roy. 8°.

Inhoud:

WINNECKE und RITTER VON STEEB. Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der Neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien.

Berichte über die Verhandlungen der kön. Sächsischen Gesellschaft der Wisschenschaften. Leizig 1880. Math.-Physische Classe. Band XXXI. 8°.

Berichte über die Verhandlungen der kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1880. Philol. historische Classe. Band XXXI. 8°.

Vierteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1879. Jahrg. 14. Heft 4. 8°.

Catalog der Bibliothek der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1880. 8°.

R. HOPPE. GRUNERT'S Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1880. Theil LXV. Heft 1. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1880. 3e Jahrg. N°. 53—56. 8°.

PETERMANN'S Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt. Gotha 1880. Band XXVI. N°. 4. 4°.

XXVI und XXVII Bericht des Vereines für Naturkunde. Cassel 1880. 8°.

Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1880. Heft 1. 8.

W. SCHLÖTEL. Doctor Nobiling und seine Lehrmeister. Stuttgart. 8°.

Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. Neubrandenburg 1880. Jahr 33. 8°.

Systematisches Inhaltsverzeichniss zu den Jahrgängen XXI—XXX und Alphabetisches Register zu den Jahrgängen XI—XXX des Archivs des Vereins der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. Neubrandenburg 1879. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1880. (Transunti). Serie 3. Vol. IV. Fasc. 5. 4°.

E. F. TROIS. Catalogo delle dimostrazioni anatomiche del Museo del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, risguardanti specialmente l'angiologia di animali acquatici preparate ed inviate alla esposizione internazionale, dei prodotti ed istrumenti di pesca di mare e di fiume in Berlino nel 1880. Venezia 1880. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Entomologisk tidskrift, på föranstaltande af Entomologiska Föreningen i Stockholm 1880. Band I. Häft 1. 8°.

RUSLAND.

ИЗВѢСТІЯ ИМПЕРАТОРСКАГО РУССКАГО ГЕОГРАФИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА. St. Petersburg 1879. 8°.

Bulletin de la Société impériale des naturalistes. Moscou 1880. Année 1879. N°. 3. 8°.

Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1880. Band V. Heft 2. 8°.

Archiv für die Naturkunde Liv, Esth- und Kurlands, herausgegeben von der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1879. 1e Serie. Band VIII. Lief. 4. 4°.

NOORD-AMERIKA.

Report of the U. S. geological survey of the territories. Washington 1179. Vol. XII. 4°.

Inhoud :

LEIDY. Fresh-water rhizopods of North-America.

Zones of stars observed at the National Observatory. Washington 1860. Vol. 1. Part. 1. 4°.

Catalogue of the library of the U. S. Naval Observatory. Washington 1879. Part. 1. (Astronomical Bibliography). 4°.

Transactions of the American Medical Association. Philadelphia 1879. Vol. XXX. 8°.

Proceedings of the Academy of natural sciences. Philadelphia 1879. Part. 1—3. 8°.

Proceedings of the American Philosophical Society. Philadelphia 1879. Vol. XVIII. N°. 104. 8°.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Boston 1879—1880. New Series. Vol. VI and Vol VII, Part. 1. 8°.

Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Cambridge, Mass. 1880. Vol. VI. N°. 5—7. 8°.

The American Journal of Otology. New-York 1880. Vol. II. N°. 2. 8°.

Documents relating to the colonial history of the State of New-York. Albany 1877. Vol. XII. 4°.

Census of the State of New-York for 1875. Albany 1877. 4°.

Results of a series of meteorological observations, made under instructions from the regents of the University at Sundry Stations in the State of New-York. Albany 1872. 4°.

88th—92d annual report of the regents of the University of the State of New-York. Albany 1875—1879. 8°.

27—31st annual report on the New-York State Museum of Natural history by the regents of the University of New-York. Albany 1875—1879. 8°.

58th—61st annual report of the trustees of the New-York State Library for the years 1875—1878. Albany 1876—1879. 8°.

Report of the special committee of the assembly on the State normal schools. Albany 1879. 8°.

LEWIS BOSS. Declination of fixed stars. (U. S. Northern Boundary Commission). 4°.

Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. New-Haven 1880. Vol. V. Part 1. 8°.

Inhoud:

E. B. WILSON. Synopsis of the pycnogonida of New England.
S. J. SMITH. The stalk-eyed crustaceans of the atlantic coast of North-America, north of Cape Cod.
R. RATHBUN. A list of the brazilian echinoderms, with notes on their distribution.
W. BEEBE. The comet of 1771; investigation of the orbit.
A. E. VERRILL. The cephalopods of the north-eastern coast of America.

The American Journal of Science. New-Haven 1879—1880. 3d Series. N°. 105—112. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Vol. V. N°. 27—48. fol.

ZUID-AMERIKA.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Buenos-Aires 1880. Tome IX. Entr. 2. 4. 8°.

AZIË.

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ost-Asiens. Yokohama 1880. (Index zu Band I). fol.

Report on the administration of the meteorological department of the government of India in 1878—79. fol.

Indian meteorological memoirs: being occasional discussions and compilations of meteorological data. Calcutta 1879. Vol. I. Part 3. fol.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1879. N°. 5—6. 8—10. 8°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1879. Vol. XLVIII. Part 1. N°. 3. Part 2. N°. 3. 8°.

AUSTRALIË.

Annual report of the department of mines, New-South Wales, for the year 1877. Sydney 1878. 4°.

Journal and proceedings of the Royal Society of New-South Wales. Sydney 1879. Vol. XII. 8°.

Proceedings on laying the memorial stone of the Wilson Hall of the University of Melbourne. 1879. 8°.

Catalogue of the objects of ethnotypical art in the National Galery published by direction of the trustees of the public Library and Museums of Victoria. Melbourne 1878. 8°.

Catalogue of the statues and busts in marble and casts in the National Gallery of Victoria. Melbourne 1880 8°.

AANGEKOCHT.

Bibliotheca belgica. Livr. 7—8. kl. 8°.

Journal des savants. Paris Avril 1880. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1879. 2e Série. Tome III Novembre—Décembre. 8°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1880. 5e Série. Tome XIX. Mars. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1880. 5th Series. Vol. IX. N°. 57. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1880. 5th Series. Vol. V. N°. 29. 8°.

Mittheilungen der k.k. Central-Commission zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale. Wien 1880. Neue Folge. Band VI. Heft 2. 4°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1880. Neue Folge. Band IX. Heft 4. Band X. Heft 1. Beiblätter. Band IV. N°. 4—5. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1880. Band CCXXXVI. Heft 3—4. 8°.

Bibliothèque universelle et revue suisse. Lausanne et Genève 1880. 3e Période. Tome V. N°. 2—4. Archives. 3e Période. Tome III. N°. 5. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JUNI 1880.

Memoriaal van de Marine. Amsterdam 1880. Afl. 22. fol.

P. M. BRUTEL DE LA RIVIÈRE. Handleiding tot de beoefening der Natuurkunde. Amsterdam 1880. 4de Gedeelte. (Het Licht). 8°.

I^s. SWART. Tijdschrift voor het zeewezen. Amsterdam 1880. N°. 1. 8°.

P. JZN. PROOST. Jodocus van Lodenstein. (Academisch proefschrift.) Amsterdam 1880. 8°.

Archives du Musée Teyler. Haarlem 1880. Vol. V. Partie. 2. roy. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1880. 4de Reeks. Deel IV. Afl. 5. 8°.

Verslag van den toestand der Stads-Bibliotheek te Haarlem over het jaar 1879. 8°.

E. PIAGET. Les pédiculines. Leide 1880. 2 Deelen. 4°. Met platen.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1880. 3de Afl. 1ste en 2de Ged. 4°.

Stroomsnelheidsmetingen op de rivieren den Boven-Rijn en zijne takken en de Boven-Maas in de jaren 1875—77. Met 70 platen. Extra-aflevering van het tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1880. 4°.

Werken der vereeniging tot uitgave der bronnen van het oude vaderlandsche recht, gevestigd te Utrecht. 's Gravenhage 1880. 1ste Reeks. N°. 1. 8°.

Nederlandsch meteorologisch jaarboek voor 1879, uitgegeven door het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut Utrecht 1880. Jaarg. 31. Deel I. Oblong.

Publications de la Société historique et archéologique dans le duché de Limbourg Ruremonde 1879. Tome XVI. 8°.

Catalogus der Athenaeum-bibliotheek te Deventer. 1880. Deel IV. 1ste Gedeelte. 8°.

Handelingen der Nederlandsche Vereeniging voor Psychiatrie. 's Bosch 1880. Deel II. N°. 5. 8°.

Rapport aan de Nederlandsche Regering, uitgebragt door den Secretaris van Zijner Majesteits gezantschap te Berlijn, over de toepassing van kunst op nijverheid in Duitschland, in verband gebragt met de te Berlijn, Leipzig en Dresden opgerigte Kunst-Gewerbe-Musea. 8°.

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het veeartsenijkundig staatstoezigt in het jaar 1879. 's Gravenhage 1880. 4°.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand April. 's Gravenhage 1880. Nieuwe Serie. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de Zeeuwsche stroomen enz., waargenomen in de maanden September—December 1879. 's Gravenhage 1880. fol.

NEDERLANDSCH-INDIË.

Notulen van de Algemeene en Bestuurs-vergaderingen van

het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1879—1880. Deel XVII. N°. 2 – 4. 8°

Register op de Notulen der vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen over de jaren 1867—1878, door J. A. VAN DER CHYS. Batavia 1879. 8°.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde; uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1879—1880. Deel XXV. Afl. 4—6. Deel XXVI. Afl. 1. 8°.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Ned. Indië uitgegeven door de Ned. Indische maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1880. Deel XXV. Afl. 4—5. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de la Belgique. Bruxelles 1880. 2e Série. Tome XLIX. N°. 4. 8°.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. Tome V. Fasc. 6. 8°.

G. VELGE. Notice explicative servant de complément à la carte géologique des environs de Lennick-St. Quentin. Bruxelles 1880. 8°. (Avec une planche).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1880. Tome XC. N°. 21—24. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1880. 2e Série. Tome IX. N°. 21—24. 8°.

Oeuvres complètes de LA PLACE. Paris 1878. Tome I—III. 4°.

Journal d'hygiène. Paris 1880. Vol. V. N°. 192—195. 4°.

V. DURUY. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des Barbares. Paris 1880. Livr. 117—120. roy. 8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. Valenciennes 1880. Tome XXXIII. N°. 3—4. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. CLXX. Part. 1—2. 4°.

Inhoud. Part. 1:

G. H. DARWIN. On the bodily tides of viscous and semi-elastic spheroids, and on the ocean tides upon a yielding nucleus.

A. SCHUSTER. On the spectra of metalloids-spectrum of oxygen.

W. THOMSON. Electrodynamic qualities of metals. Part VII. Effects of stress on the magnetization of iron, nickel, and cobalt.

W. CROOKES. On repulsion resulting from radiation.

———— On the illumination of lines of molecular pressure, and the trajectory of molecules.

W. SPOTTISWOODE and J. FLETCHER MOULTON. On the sensitive state of electrical discharges through rarefied gases.

J. CLERK MAXWELL. On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature.

W. N. HARTLEY and A. K. HUNTINGTON. Researches on the action of organic substances on the ultra-violet rays of the spectrum.

J. B. HANNAY. On the microrheometer.

R. T. GLAZEBROOK. An experimental determination of the values of the velocities of normal propagation of plane waves in different directions in a biaxal crystal, and a comparison of the results with theory.

W. D. NIVEN. On certain definite integrals occurring in spherical harmonic analysis and on the expansion, in series of the potentials of the ellipsoid and the ellipse.

E. H. GORDON. Measurements of electrical constants. II. On the specific inductive capacities of certain dielectrics.

Part. 2:

G. H. DARWIN. On the precession of a viscous spheroid, and on the remote history of the earth.

G. H. DARWIN. Problems connected with the tides of a viscous spheroid.
W. KITCHEN PARKER. On the structure and development of the skull in the Lacertilia.
W. CROOKES. Contributions to molecular physics in high vacua.
J. PRESTWICH. On the origin of the parallel roads of lochaber and their bearing on other phenomena of the glacial period.
O. REYNOLDS. On certain dimensional properties of matter in the gaseous state.

Proceedings of the Royal Society. London 1879—1880. Vol. XXIX. N°. 197—199. Vol. XXX. N°. 200—201. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1880. New-Series. Vol. II. N°. 6. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1880. Vol. XL. N°. 7. 8°.

The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1880. New Series. Vol. XII. Part. 2. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1880. Vol. III. N°. 3. 8°.

Proceedings of the Natural History Society of Glasgow. 1880. Vol. IV. Part. 1. 8°.

OOSTENRIJK.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft. Wien 1879. Band XXII. 8°.

Casopis pro pestovani mathematiky a fysiky. Praze 1879—1880. Rocnik IX. Cislo 1—6. 8°.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin Februar 1880. 8°.

R. VIRCHOW. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1880. Band LXXX. Heft 2. 8°.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig 1880. Neue Folge. Band IV. Heft 4. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1880. 3e Jahrg. N°. 57—58. 8°.

Journal für ornithologie. Leipzig 1879—1880. 4e Folge. Band VII. Heft 3—4. Band VIII. Heft 1. 8°.

H. SCHEFFLER. Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der abstrakten Wissenschaften. Leipzig 1880. Lief 6—8. 8°.

PETERMANN's Mittheilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Gotha 1880. Band XXVI. N°. 5—6. Ergänzungsheft N°. 61. 4°.

Verhandlungen der physik. medicin. Gesellschaft. Würzburg 1880. Neue Folge. Band XIV. Heft 3—4. 8°.

Neues lausitzisches Magazin, herausgegeben von der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Görlitz 1880. Band LVI. Heft 1. 8°.

Sitzungsberichte der mathem. physik. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München 1880. Heft 2. 8°.

Sitzungsberichte der philos. philol. und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München 1879. Band II. Heft 2. 8°.

ZWITSERLAND.

Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles. Lausanne 1880. 2e Série. Vol XVI. N°. 83. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1880. Serie 3. Vol. IV. Fasc. 6. (Transunti). 4°.

Bollettino della Societa adriatica di scienze naturali. Trieste 1880. Vol. V. N°. 2. 8°.

P. MANTEGAZZA. Archivio per l'antropologia e la etnologia. Firenze 1880. Vol. X. Fasc. 1. 8°.

G. M. CARDONI. Un viaggio a Constantinopoli. Faenza 1880. kl. 8°.

Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel. Læipzig 1880. Band II. Heft 1. 8°.

PORTUGAL.

Supplemento a collecção dos tratados, convenções, contratos e actos publicos celebrados entre a corôa de Portugal e as mais potencias desde 1640. Lisboa 1879 Tomo IX. 8°.

DENEMARKEN.

Mémoires de l'Académie royale de Copenhague. Classe des sciences. Copenhague 1880. 5me Série. Vol. XI. N°. 6. Vol. XII. N°. 5. 4°.

Inhoud, Vol. XI, N°. 6:

A. HANNOVER. Primordialbrusken og dens forbening i det menneskelige kranium for fodselen.

Vol. XII, N°. 5.

T. N. THIELE. Om anvendelse af mindste kvadraters methode i nogle tilfaelde, hvor en komplikation af visse slags uensartede tilfaeldige fejlkilder giver fejlene en systematisk karakter.

Oversigt over det kong. danske videnskabernes selskab forhandlinger og dets medlemmers arbejder. Kjobenhavn 1879. N°. 3. 1880. N°. 1. 8°.

S. KLEINSCHMIDT. Den gronlandske ordbog. Kjobenhavn 1871. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

H. HILDEBRAND HILDEBRANDSSON. Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. 1879—80. Vol. XI. 4°.

RUSLAND.

E. LOENING. Ueber die Reliefs der altspartanischen Basis. Dorpat. 4°.

Festrede zur Jahresfeier der Stiftung der Universität Dorpat am 12 December 1879, gehalten von E LOENING. Dorpat 1880. 4°.

E. LOENING. Die Haftung des Staats aus rechtwidrigen Handlungen seiner Beamten nach deutschem Privat- und Staatsrecht. Dorpat 1879. (Festschrift) roy. 8°.

P. HELMLING. Ueber die Integration der allgemeinen Riccatischen Gleichung $\frac{dy}{dx} + y^2 = x$ und der von ihr abhängigen Differential-Gleichungen. Dorpat 1879. (Festschrift). 4°.

C. FRANKENHAEUSER. Untersuchungen über den Bau der tracheo-bronchial Schleimhaut. St. Petersburg 1879. 8°.

L. ZWINGMANN. Die Amyloidtumoren der conjunctiva. Dorpat 1879. 8°.

H. WATRASZEWSKI. Beiträge zur Behandlung der Oberschenkel-Schussfracturen im Kriege. Dorpat 1879. 8°.

W. GIESS. Erfahrungen über Schussfracturen an den Extremitäten aus dem russisch-türkischen Kriege 1877 – 78. Dorpat 1879. 8°.

R. KOCH. Ueber die Wirkung der Oxalate auf den thierischen Organismus. Dorpat 1879. 8°.

W. PACHT. Ueber die cutane Sensibilität. Dorpat 1879. 8°.

F. ROSENBAUM. Untersuchungen über den Kohlehydratbestand des thierischen Organismus nach Vergiftigung mit Arsen, Phosphor, Strychnin, Morphin, Chloroform. Dorpat 1879. 8°.

J. KRANNHALS. Klinische Beobachtungen aus der Wittwe Reimers'schen Augenheilanstalt zu Riga. Dorpat 1879. 8°.

H. SCHLOCKER. Ueber die Anomalieen des Pterion. Dorpat 1879. 8°.

B. GOLAWSKI. Zur Casuistik der Lymphosarcome (Adenie) Dorpat 1879. 8°.

W. WERNCKE. Ueber die Wirkung einiger Antiseptica und verwandter Stoffe auf Hefe. Dorpat 1879. 8°.

P. HAENSELL. Beiträge zur Lehre von der Tuberculose der Iris, Cornea und Conjunctiva nach Impfversuchen an Thieren und klinischen Beobachtungen an Menschen. Dorpat 1879. 8°.

P. KUEHN. Ein Beitrag zur Biologie der Bacterien. Dorpat 1879. 8°.

O. THILO. Die Sperrgelenke an den Stacheln einiger Welse, des Stichlinges und des Einhornes. Dorpat 1879. 8°.

TH. HABERKORN. Das Verhalten von Harnbacterien gegen einige Antiseptica. Dorpat 1879. 8°.

A. MERCKLIN. Studien über die primäre Verrücktheit. Dorpat 1880. 8°.

H. VON BOEHLENDORFF. Ein Beitrag zur Biologie einiger Schizomyceten. Dorpat 1880. 8°.

J. WERNITZ. Ueber die Wirkung der Antiseptica auf ungeformte Fermente. Dorpat 1880. 8°.

N. SACK. Beitrag zur Statistik der Kniegelenkresection bei antiseptischer Behandlung. Dorpat 1880. 8°.

J. KOROLL. Quantitativ-chemische Untersuchungen über die Zusammensetzung der Kork-, Bast-, Sclerenchym- und Markgewebe. Dorpat 1880. 8°.

A. KARSTENS. Ueber febris recurrens. Dorpat 1880. 8°.

TH. PFEIL. Chemische Beiträge zur Pomologie. Dorpat 1880. 8°.

E. VON KEUSSLER. Untersuchung der chrysophansäureartigen Substanz der Sennoblätter und der Frangulinsäure nebst Vergleichung derselben mit der Chrysophansäure des Rhabarbers. Dorpat. 8°.

J. KLINGE. Vergleichend histiologische Untersuchung der Gramineen- und Cyperaceen-Wurzeln insbesondere der Wurzel-Leitbündel. St. Petersburg 1879. 4°.

E. SCHEIBE. Darstellung und Beschreibung der Borcitronensäure und ihrer Salze. Dorpat 1879. 8°.

A. POEHL. Untersuchung der Blätter von Pilocarpus officinalis (jaborandi) in pharmacognostischer und chemischer Beziehung. St. Petersburg 1880. 8°.

L. VON SCHROEDER. Ueber die Mâitrayaṇi Saṃhitâ, ihr Alter, ihr Verhältniss zu den verwandten Çâkhâ's, ihre sprachliche und historische Bedeutung. Dorpat 1879. 8°.

C. HILKISCH. Die Tungusen. Eine ethnologische Monographie. St. Petersburg 1879. 8°.

A. THUN. Beiträge zur Lehre von den gewerblichen Betriebsformen. Dorpat 1880. 8°.

NOORD-AMERIKA.

11th Annual report of the U. S. geological and geographical Survey of the territories embracing Idaho and Wyoming being a report of progress of the exploration for the year 1877. Washington 1879. 8°.

F. E. NIPHER. Choice and change: a lecture delivered before the Kansas City Academy of science. Kansas City 1880. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Vol. V. N°. 50—80. fol.

ZUID-AMERIKA.

Anales de Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1880. Tome IX. Entr. 5. 8°.

Boletin del Instituto geografico Argentino. Buenos Aires 1880. Tomo I. Cuaderno 2—3. 8°.

AANGEKOCHT.

Journal des savants. Paris Mai 1880. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1879. 2e Série. Tome III. (Tables des matières). 8°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1880. 5me Série. Tome XIX. Avril. 8°.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1880. 5th Series. Vol. IX. N°. 58. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1880. 5th Series. Vol V. N°. 30. 8°.

F. H. TROSCHEL. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1879. Jahrg. 45. Heft 5. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1880. Neue Folge. Band X. N°. 6. 8°.

DINGLER's polytechnisches Journal. Augsburg 1880. Band CCXXXVI. Heft 5. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Göttingen 1880. St. 5—6. 9—21. Nachrichten. N°. 7—9. 8°.

Bibliothèque universelle et revue suisse. Genève 1880. Archives. 3e Période. Tome III. N°. 6. 8°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1879. New Series. Vol. XLVIII. Part. 1. N°. 4. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAANDEN JULI, AUGUSTUS en SEPTEMBER 1880.

Afbeeldingen van oude bestaande gebouwen, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der bouwkunst. Amsterdam 1880. Afl. 22. fol.

Koninklijk oudheidkundig genootschap te Amsterdam. Jaarverslag in de 22ste algemeene vergadering, op Maandag 24 Mei 1880, uitgebracht. 8°.

C. A. J. A. OUDEMANS. Handleiding tot de pharmacognosie van het planten- en dierenrijk. 2de druk. Amsterdam 1880. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1880. N°. 1—2. 8°.

De Navorscher. Amsterdam 1880. Nieuwe Serie. Jaarg. 13. N°. 6—8. 8°.

H. VERKOUTEREN. Academisch proefschrift over artikel 153 der Grondwet. Amsterdam 1880. 8°.

Jaarboek van het mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indië. Amsterdam 1880. 9e Jaarg. Deel 1. 8°.

Memoriaal van de marine. Amsterdam 1880. Afl. 23. fol.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1880. 4de Reeks. Deel IV. N°. 6—8. 8°.

M. TREUB. Sur des cellules végétales a plusieurs noyaux. (Extrait des Archives Néerlandaises. T. XV). 8°.

M. TREUB. Notice sur les noyaux des cellules végétales. (Extrait des Archives de Biologie, Vol. I). 8°.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1880. Afl. IV. 2de Ged. Afl. V. 1ste Ged. 4°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Ned.-Indië, uitgegeven door het Koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederl.-Indië. 's Gravenhage 1880. 4de Reeks. Deel IV. St. 3. 8°.

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische vereeniging. 's Gravenhage 1880. Deel XXIII. Afl. 4. 8°.

Verslag van de aanwinsten der Koninklijke Bibliotheek gedurende het jaar 1879. 's Gravenhage 1880. 8°.

Verslag vân het Rijksarchief te 's Gravenhage over 1879. 8°.

Verslagen omtrent 's Rijks Oude Archieven, 1879. N°. 2. 's Gravenhage 1880. 8°.

Verslagen omtrent 's Rijks verzamelingen van geschiedenis en kunst, 1879. N°. 2. 's Gravenhage 1880. 8°.

Lijst van boekwerken, die van den 1sten Januarij 1879 tot en met den 30sten Junij 1880 voor de Bibliotheek van het Departement van Oorlog zijn aangekocht of ten geschenke ontvangen. 8°.

Verslagen aan den Koning betrekkelijk de dienst der posterijen en der telegrafen in Nederland in het jaar 1879. II. Telegrafen. 's Gravenhage 1880. 4°.

Rapport der Commissie van Hoofd-ingenieurs nopens een nader onderzoek naar de vereischte verbeteringen van de

bestaande Keulsche vaart en betreffende een globaal ontwerp voor een waterweg van Amsterdam tot Utrecht de verbeterde Keulsche vaart volgende en verder over Wijk bij Duurstede naar de Waal bij Tiel. 's Gravenhage 1880. 4°.

Ontwerp van een kanaal van Amsterdam langs Utrecht over Wijk bij Duurstede naar Tiel, en voor een kanaal van Amsterdam over Gouda naar Rotterdam, van den hoofd-ingenieur J. VAN DER TOORN. 's Gravenhage 1880. 4°.

Rapport betreffende eene aanvraag van den heer J. G. JÄGER te Amsterdam, om concessie voor den aanleg van een kanaal door de Geldersche Vallei, ter verbinding van Amsterdam met den Boven-Rijn en voor de droogmaking der plassen beoosten de Vecht. 's Gravenhage 1880. 4°.

Rapport der Commissie van hoofd-ingenieurs betreffende het plan eener Rijnvaart tusschen de Waal en het Noordzeekanaal, van den directeur der publieke werken te Amsterdam. 's Gravenhage 1880. 4°.

Eindverslag van de staats-commissie benoemd bij Koninklijk besluit van 4 December 1877, N°. 1, tot het instellen van een onderzoek omtrent de verbetering van den Waterweg langs Rotterdam naar Zee. 's Gravenhage 1880. 4°. (Met teekeningen).

Pinacographia. 's Gravenhage 1880. Afl. 9. 4°.

Midden-Sumatra. Reizen en onderzoekingen der Sumatra-expeditie, uitgerust door het Aardrijkskundig Genootschap, 1877—1879, beschreven door de leden der expeditie, onder toezicht van Prof. P. J. VETH. Leiden 1880. Deel I. Afl. 1, Dl. II. Afl. 1, Dl. III. Afl. 1, Dl. IV, Afl. 1. roy. 8°. Met Atlas.

J. E. GOUDSMIT. Pandecten-systeem. Leiden 1880. Deel II. roy. 8°.

Catalogue de la Bibliothèque Wallone, déposée à Leide. (Supplément 1875—1880, rédigé par le Dr. W. N. DU RIEU). Leide 1880. 8°.

J. A. FRUIN. De Nederlandsche wetboeken. Utrecht en 's Gravenhage 1880. Afl. 12 8°.

21ste jaarlijksch verslag betrekkelijk de verpleging en het onderwijs in het Nederlandsch Gasthuis voor ooglijders. Utrecht 1880. 8°.

Rijkslandbouwschool te Wageningen. Programma van het onderwijs voor het leerjaar 1880—1881. 8°.

Zelandia illustrata. Verzameling van kaarten, platen enz. toebehoorende aan het Zeeuwsch genootschap der wetenschappen. Middelburg 1880. Deel II. Afl. 2. 8°.

Handelingen der Nederlandsche vereeniging voor Psychiatrie. 's Bosch 1880. Deel II. N°. 6. 8°.

79ste verslag van het Natuurkundig Genootschap te Groningen, over het jaar 1879. 8°.

J. DIRKS. Penningkundig repertorium. N°. XV—XVI. 8°.

Verslag van den toestand der provincie Friesland in 1879, aan de Staten van dat gewest gedaan door de Gedeputeerde Staten, in de zomervergadering van 1880. Leeuwarden 1880. 8°.

Statistiek van het koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden Mei, Junij en Julij 1880. 's Gravenhage 1880. Nieuwe Serie. fol.

Verzamelingstabellen der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee, de Wadden, enz., waargenomen in de maand Januari 1880, benevens recapitulatietabellen der waterhoogten over het jaar 1879. 's Gravenhage 1880. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1880. Deel XXXIX. St. 2. Deel XLI. St. 1. roy. 8°.

Inhoud, Dl. XXXIX, 2:

Aanteekeningen omtrent Midden-Sumatra, aan officiële bescheiden ontleend.

Dl. XLI, 1:

D. GERTH VAN WIJK: De geschiedenis van prinses Balkis, eene Maleische vertelling.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Ned. Indië, uitgegeven door de Ned. Indische maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1880. Deel XXV. Afl. 6—7. 8°.

Geneeskundig tijdschrift voor Ned.-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der Geneeskundige wetenschappen in Ned.-Indië. Batavia 1880. Nieuwe Serie. Deel X. Afl. 1. 8°.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1880. 1e Jaarg. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1880. 2e Série. Tome XLIX. N°. 5—8. 8°.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. Tome VI. Fasc. 1. 8°.

Inhoud :

V. DESGUIN. Étude de métalloscopie et de métallothérapie.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. 3e Série. Tome XIV. N°. 5—7. 8°.

Texte explicatif du levé géologique de la planchette d'Anvers, par M. le baron O. VAN ERTBORN, avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8.

Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Malines par M. le baron O. VAN ERTBORN, avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8°.

Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Boom par M. le baron O. VAN ERTBORN avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8°.

Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Beveren par M. le baron O. VAN ERTBORN avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8°.

J. MAC LEOD. Contribution à l'étude de la structure de l'ovaire des mammifères (taupe, hermine, vesperugo pipistrella, etc.). 8°.
(Extrait des Archives de Biologie. Vol. I).

———— Contribution à l'étude du rôle des insectes dans la pollinisation des fleurs hétérostyles (primula elatior). 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie de Belgique. Tome L).

V. LIÉNARD. Recherches sur le système nerveux des arthropodes. Constitution de l'anneau oesophagien. 8°.
(Extrait des Archives de Biologie. Vol. I).

Vlaamsche Bibliographie. Lijst van Nederlandsche boeken etc. in België in 1879 verschenen. Gent 1880. 8°.

L. DE RIJCKER. Het grondwettelijk bestuur van het oude Gent. Gent 1880. 8°.
(Uitgave van het Willems-Fonds).

G. VAN DER MENSBRUGGHE. Du role de la surface libre de l'eau dans l'économie de la nature. 8°.

——————————— Sur l'application du second principe de thermodynamique aux variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie de Belgique. T. XLIX).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1880. Tome XC. N°. 25—26. Tome XCI. N°. 1—11. 4°.

Journal de l'Ecole polytechnique. Paris 1879. Tome XXVIII. 4°.

Bibliothèque nationale. Catalogue de l'histoire de France. Paris 1870—1879. Tome X—XI. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1880. 2e Série. Tome IX. N°. 25—37. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1879—1880. Tome XXVI. (Session extraordinaire). T. XXVII. Comptes rendus N°. 2—3. Revue bibliographique A. 8°.

Bulletim de la Société mathématique de France. Paris 1880. Tome VIII. N°. 4—5. 8°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1880. 3e Année. N°. 6—9. 8°.

Société centrale des architectes. Paris 1880. 5e Série. Vol. III. N°. 7. 8°.

V. DURUY. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'a l'invasion des barbares. Paris 1880. Livr. 121—133. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1880. Vol. V. N°. 196—208. 4°.

La lumière électrique, Journal universel d'électricité. Paris 1880. Tome II. N°. 12. 4°.

A. LEFÉBURE. Mémoire sur les résidus des puissances n des nombres déterminés par les diviseurs premiers de la forme $2kn+1$ et sur la résolution de l'équation $x^n+y^n=z^n$ en nombres entiers pour n plus grand que 2. Paris 1880. 8°.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Paris Lyon 1878—79. Classe des sciences. Tome XXIII. roy. 8°.

Inhoud:

ANDRÉ. L'observatoire universitaire de Lyon.
J. BONNEL. Etude sur l'histoire de l'astronomie au moyen-âge.
H. DOR. De l'évolution historique du sens des couleurs.
FAIVRE. Etudes sur les laticifères et le latex pendant l'évolution germinative normale chez l'embryon du Tragopogon porrifolius (L).
DE FORCRAND et BALLIN. Note sur la production des outremers de différents métaux.
R. DE FORCRAND. Formation des outremers organiques.
E. GUIMET. Note sur les outremers.
J. B. GUIMET. Cahier d'expériences, 1826.

LAVOR. Résumé des observations météorologiques faites dans la partie supérieure du bassin du Rhône.
LOIR. Notes historiques sur la découverte de l'outremer artificiel.
J. MICHEL. Essai sur les diverses mesures de longueur et de superficie employées en France avant l'adoption du système métrique.
TH. PERRIN. De la force psycho-vitale dans ses rapports avec les fonctions physiologiques et les affections morbides.
ROLLET. Des applications du feu à l'hygiène dans les temps préhistoriques.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Paris-Lyon 1878—79. Classe des lettres. Tome XVIII. roy. 8°.

Inhoud :

CAILLEMER. L'établissement des Phirgondes dans le Lyonnais.
YÉMÉNIZ Les ducs français d'Athènes.
S. NEYRAT. Un festival musical en Angleterre.
BRESSON. L'architecture religieuse du IVe au XIIIe siècle.
E. GUIMET. Hospice des enfants trouvés à Canton.
BIGNARD. Quelques idées sur la théogonie d'Hésiode.
S. NEYRAT. Quelques jours en Dalmatie et au Monténégro.

Annales de la Société linnéenne de Lyon. Lyon-Paris 1878. Nouvelle Série. Tome XXIV—XXV. 8°.

Annales de la Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon. Lyon, Paris 1878—1880. 4e Série. Tome X. 5e Série. Tome I. roy. 8°.

SAINT-LAGER. Réforme de la nomenclature botanique. Lyon 1880. 8°.

Mémoires de la Société des antiquaires de Picardie. Paris-Amiens 1880. 3e Série. Tome VI. 8°.

Inhoud :

G. LECOCQ. Voiture et l'hôtel de Rambouillet.
A. VAN ROBAIS. Notice sur des vases ornés de sujets, une parure et des épées en bronze.
A. DE CARDEVACQUE. Lamotte en Santerre.

DE MARSY. L'exécution d'un arrêt de Parlement au XVe siècle.

A. DUBOIS. Aide de 5795 liv. 10s 4d, dite aide ordonnée pour le passage de la mer.

CORBLET. Les souvenirs de saint Firmin à Pamplona.

A. DE CALONNE. Rôle de trois cents hommes d'armes passés en revue à Tournay, les 17, 18 et 19 Juin 1398.

DARSY. Les prisons en Picardie. Etude historique sur la détention préventive et pénale et sur les prisons anciennes.

A. JANVIER. Le bâtard de Saint-Pôl.

A. DE CALONNE. L'alimentation de la ville d'Amiens au XVe siècle.

J GARNIER. Notice sur un cachet d'oculiste romain.

CH. SALMON. Actes inédits de Sant Lucien, premier évêque de Beauvais.

DUVAL. De l'administration du diocèse d'Amiens pendant la vacance épiscopale.

Bulletin de la Société des antiquaires de Picardie. Paris, Amiens 1879. Tome XIII. 8°.

Société d'agriculture, sciences et arts de l'arrondissement de Valenciennes. Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. Valenciennes 1880. Tome XXXIII. N°. 5—7. 8°.

Mémoires de l'Académie de Stanislas. Nancy 1867—1878, 1880. 3e Série. Années 1865—1866. 4e Série. Tome I. (1867) — X, XII. 8°.

Tables alphabétiques des matières et des noms d'auteurs contenus dans les trois premières séries des Mémoires de l'Académie de Stanislas (1750—1866). Nancy 1870. 8°.

Bulletin historique de la Société des antiquaires de la Morinie. St. Omer 1880. Nouvelle Série. Livr. 112—113. 8°.

Société agricole, scientifique et littéraire des Pyrénées-orientales. Perpignan 1880. Vol. XXIV. 8°.

Assises régionales agricoles et scientifiques tenues à l'oc-

cassion du concours régional de 1880 à Perpignan. (Compte-rendu). Perpignan 1880. 8°.

H. VOINESSON DE L. Procédés pratiques pour reconnaitre les falsifications des vins. Epinal 1880. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1879. Vol. CLXX. Part. 1. 4°.

Inhoud:

G. H. DARWIN. On the bodily tides of viscous and semi-elastic spheroids, and on the ocean tides upon a yielding nucleus.

A. SCHUSTER. On the spectra of metalloids — spectrum of oxygen.

W. THOMSON. Electrodynamic qualities of metals. Effects of stress on the magnetization of iron, nickel, and cobalt.

W. CROOKES. On repulsion resulting from radiation.

———On the illumination of lines of molecular pressure, and the trajectory of molecules.

W. SPOTTISWOODE and J. F. MOULTON. On the sensitive state of electrical discharges through rarefied gases.

J. CLERK MAXWELL. On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature.

W. N. HARTLEY and A. K. HUNTINGTON. Researches on the action of organic substances on the ultra-violet rays of the spectrum.

J. B. HANNAY. On the microrheometer.

R. T. GLAZEBROOK. An experimental determination of the values of the velocities of normal propagation of plane waves in different directions in a biaxal crystal, and a comparison of the results with theory.

W. D. NIVEN. On certain definite integrals occurring in spherical harmonic analysis and on the expansion, in series, of the potentials of the ellipsoid and the ellipse.

J. E. H. GORDON. Measurements of electrical constants. On the specific inductive capacities of certain dielectrics.

Proceedings of the Royal Society of London. 1880. Vol. XXX. N°. 202—205. 8°.

Transactions of the Zoological Society of London. 1880. Vol. XI. Part. 2. 4°.

Inhoud:

J. MURIE. Further observations on the manatee.
T. JEFFREY PARKER. On the intestinal spiral valve in the genus raia.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London for the year 1880. Part. 1—2. 8°.

Catalogue of the Library of the Zoological Society of London. 1880. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1880. Vol. XL. N°. 8. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1880. New Series. Vol. II. N°. 7—9. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1880. Vol. III. N°. 4. 8°.

Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1880. Vol. IX. N°. 4. 8°.

OOSTENRIJK.

Jahresbericht des Academischen naturwissenschaftlichen Vereines in Graz. 1876—1879. Jahrg. 2—5. 8°.

HONGARIJE.

L. R. LANDAU. Religion und Politik nebst Nachtrag zur Sammlung kleiner Schriften. Budapest 1880. 8°.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1880. März — Juni. 8°.

R. VIRCHOW. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1880. Band LXXX. Heft 3. Band LXXXI. Heft 1—2. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1880. Jahrg. 1880. Heft 1—2. 4°. Oblong.

Gemeinfässliche Mittheilungen aus den Untersuchungen der Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere. Kiel 1880. 8°.

Astronomische Nachrichten begründet von H. C. SCHUMACHER und herausgegeben von C. A. F. PETERS. Altona 1858—1859, 1861—1862. Band XLVIII—L, LIV—LVIII. Kiel 1876—1880. Band LXXXVII—XCVI. 4°.

Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle im Jahre 1879. 4°.

PETERMANN'S Mittheilungen aus JUSTUS PERTHES' geographischer Anstalt. Gotha 1880. Band XXVI. N°. 7—8. 4°.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der Medicinisch-Naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. 1879—1880. Band XIII. Heft 4. Band XIV. Heft 2. 8°.

Mittheilungen aus dem Chemischen Laboratorium der Universität Jena. 1879. 8°.

Der Zoologische Garten. Frankfurt a/M. 1880. Jahrg. 21. N°. 1—6. 8°.

XVI. Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden. 8°.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1880. Jahrg. 15. Heft 1—3. 8°.

R. HOPPE. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik; Leipzig 1880. Teil LXV. Heft 2. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1880. Jahrg. 3. N°. 59—65. 8°.

E. FÖRSTER. Denkmale deutscher Kunst von Einführung des Christenthums bis auf die neueste Zeit. Leipzig 1867—1869. Band XI—XII. 4°.

CHR. G. KAYSER'S vollständiges Bücher-Lexicon enthaltend die von 1750 bis Ende des Jahres 1864 in Deutschland und in den angrenzenden Ländern gedrückten Bücher. Leipzig 1865—1877. Band XV—XX. 4°.

Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaft zu Braunschweig für das Geschäftsjahr 1879—80. Braunschweig 1880. 8°.

Jahrbücher der kön. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt. 1880. Neue Folge. Heft X. 8°.

Berichte über die Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i/B. 1880. Band VII. Heft 4. 8°.

VI. Bericht des Vereins für Naturkunde in Fulda. 1880. 8°.

Correspondenz-Blatt des zoologisch-mineralogischen Vereines in Regensburg. 1879. Jahrg. 33. 8°.

Circular an Gelehrte, welche der Berliner Akademie der Wissenschaften nicht angehören von W. SCHÖTEL. (Würzburg 1880). 8°.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1880. Heft 3. 8°.

Sitzungsberichte der philos.-philol. und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1880. Heft 1. 8°.

J. B. VON SPIX und C. F. P. VON MARTIUS. Reise in Brasilien in den Jahren 1817 bis 1820 gemacht und beschrieben. München 1823—1831. 3 Dl. met Atlas. 4°.

Icones plantarum cryptogamicarum quas in itinere annis 1817—1820 per Brasiliam collegit et descripsit C. F. P. DE MARTIUS. Monachii 1828—1834. 4°.

LUXEMBURG.

Publications de la section historique de l'Institut royal grand-ducal de Luxembourg. 1880. Tome XXXIV. roy. 8°.

ZWITSERLAND.

F. W. C. TRAFFORD. Souvenir de l'amphiorama ou la vue du monde pendant son passage dans une comète. Zurich 1880. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1880. Transunti. Serie 3. Vol. IV. Fasc. 7. 4°.

PORTUGAL.

Noticia biographica do conselheiro il Defonso-Leopoldo

Bayard, com varios documentos comprovantes. Pariz 1856. 8°.

A. DE SALDANHA DA GAMA. Memoria historica e politica sobre o commercio da escravatura entregue no dia 2 de Novembro de 1816 ao conde capo d'Istria. Lisboa 1880. 8°.

RUSLAND.

Acta horti petropolitani. St. Petersburg 1880. Tomus VI. Fasc. 2. 8°.

C. KOSSOWICZ. Canticum canticorum. Ex hebraeo convertit et explicavit. Petropoli 1879. 8°.
Travaux de la 3e Session du congrès international des orientalistes. Tome II. Supplément.

Finlands geologiska undersökning. Beskrifning till kartbladet N°. 2 af K. A. MOBERG. Helsingfors 1880. 8°.

AFRIKA.

Bulletin trimestriel de la Société khédivale de Géographie. Le Caire 1876—1879. N°. 1, 2, 5, 6. 8°.

AZIË.

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur-und Völkerkunde Ost-Asiens. Yokohama Juni 1880. 4°.

Indian meteorological memoirs. Calcutta 1880. Vol. I. Part. 4. fol.

AUSTRALIË.

Transactions and proceedings of the Royal Society of Victoria. Melbourne 1880. Vol. XVI. 8°.

NOORD-AMERIKA.

Report of the superintendent of the U. S. coast survey showing the progress of the work for the year ending with June, 1876. Washington 1879. 4°.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology at Harvard College. Cambridge 1880. Vol. VII. N°. 1. 4°.

Inhoud:

L. AGASSIZ. Report on the Florida reefs.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology at Harvard College. Cambridge 1880. Vol. VII. N°. 1. 8°.

Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1880. Vol. XII. 4°.

W. A. ROGERS. Catalogue of 618 stars observed at the Astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1880. 4°.
(Extrated from Volume XII of the Annals etc.).

E. C. PICKERING. Dimensions of the fixed stars with especial reference to binaries and variables of the algol type. Cambridge 1880. 8°.
(Reprinted from the proceedings of the American Academy of arts and sciences. Vol. XVI).

The American journal of otology. New-York 1880. Vol. II. N°. 3. 8°.

Report to the trustees of the „James Lick Trust" of observations made on mount Hamilton with reference to the location of Lick Observatory bij s. w. BURNHAM. Chicago 1880. roy. 8°.

Anales del Ministerio de fomento de la Republica Mexicana. Mexico 1880. Tomo III. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la Republica Mexicana. Mexico 1880. Tome V. N°. 81—150. fol.

Archivos do Museu Nacional do Rio de Janeiro. 1877—78. Vol. II—III. N°. 1—2. 4°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Aires 1880. Tome X. Entr. 1—2. 8°.

AANGEKOCHT.

W. PLEYTE. Nederlandsche oudheden van de vroegste tijden tot op Karel den Groote. Leiden 1880. Afl. 7. 4°.

CH. DAREMBERG et E. SAGLIO. Dictionnaire des antiquités grecques et romaines. Paris 1880. Fasc. 7. 4°.

Journal des savants. Paris, Juin—Août 1880. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1880. 2e Série. Tome III. Janvier—Février. 8°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1880. 5e Série. Tome XX. Mai—Août. Tome XXI. Septembre. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1880. 5th Series. Vol. VI. N°. 31—33. 8°.

The London, Edinburg, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1880. 5th Series. Vol X. N0. 59—61. 8°.

The zoological record for 1878. London 1880. Vol. XV. 8°.

F. H. TROSCHEL. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1880. Jahrg. 46. Heft 3. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1880. St. 22—36. Nachrichten N0. 10—15 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1880. Neue Folge. Band X. Heft 3—4. Band XI. Heft 1. Beiblätter. Band IV. St. 6—7. 8°.

Allgemeine deutsche Biographie. Leipzig 1880. Band XI. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1880. Band 236. Heft 6. Band 237. Heft 1—5. 8°.

Bibliothèque universelle et revue suise. Lausanne 1880. 3e Période. Tome VI. N0. 5—6. Tome VII. N0. 7—8. Archives. 3e Période. Tome IV. N0. 7—8. 8°.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. N0. 1—3. 8°.

Annalen des historischen Vereins für den Niederrhein insbesondere die alte Erzdiöcese Köln. Köln 1855—1878. Heft 1—32. 8°.

JOH. WOLFIUS. Lectionum memorabilium et reconditarum centenarii XVI. 2 Vol. Lauingae, sumt. autoris impr. Leonh. Rheinmichel, 1600. fol.

BARTH. FISEN Leodiensis Sancta legia Romanae ecclesiae

filia, sive Historiarum ecclesiae Leodiensis partes duae. Leodii 1696. fol.

J. A. ZUNGGO. Historiae generalis et specialis de ordine canonicorum regularium S. Augustini prodromus. 2 tom (1 Vol.) Ratisbonae 1742. fol.

A. RAYSSII. Hierogazophylacium belgicum sive thesaurus sacrarum reliquiarum Belgii. Duaci ap. Ger. Pinchon 1628. kl. 8°.

A. RAISSIUS. Origines Cartusiarum Belgii. Duaci typ. M. Bogardi 1632. kl. 4°.

———— Belgica christiana; siue synopsis successionum et gestorum Episcoporum Belgicae provinciae. Duaci, ex typ. B. Bardov 1634. 4°.

J. LE LONG. Kort historisch verhaal van den eersten oorsprong der Nederlandschen gereformeerden kerken onder 't kruis; beneffens alle derselver leer- en dienst-boeken enz. 't Amsterdam 1751. 4°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND OCTOBER 1880.

Memoriaal van de Marine. Amsterdam 1880. Aff. 24. fol.

Bouwkundige bijdragen, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der bouwkunst. Amsterdam 1880. Deel XXVI. St. 1. 4.

Werken van het Genootschap ter bevordering der Natuur-Genees- en Heelkunde te Amsterdam. 1880. Deel V. 8°.

Genootschap ter bevordering van natuur-, genees- en heelkunde te Amsterdam. Herdenking van JAN SWAMMERDAM's 200-jarigen sterfdag op 17 Februari 1880. 8°.

Staatkundig en staathuishoudkundig jaarboekje voor 1880, uitgegeven door de Vereeniging voor de statistiek in Nederland. Amsterdam 1880. 6e Serie. Jaarg. 7. 8°.

Algemeen jaarlijksch verslag van de Maatschappij voor den werkenden stand over het jaar 1879. Amsterdam 1880. 8°.

C. A J. A. OUDEMANS en HUGO DE VRIES. Leerboek der plantenkunde, ten gebruike bij het hooger onderwijs. Amsterdam 1880. Deel I. (Leerboek der plantenphysiologie.) 8°.

A. H H. DUPONT. Dante aux Pays-Bas. Amsterdam 1880. 8°.

De Navorscher. Amsterdam 1880. Nieuwe Serie. 13e Jaarg. N°. 9. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1880. N°. 5—6. 8°.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden godsdienst, uitgegeven door TEYLER's Godgeleerd Genootschap. Haarlem 1880. Nieuwe Serie. Deel IX. St. 1—2. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1880. 4e Reeks. Deel IV. N°. 9—10. 8°.

K. MARTIN. Die Tertiärschichten auf Java. Nach den Entdeckungen von FR. JUNGHUHN. Leiden 1880. gr. 4°.

Flora Batava. Leiden 1880. Afl. 249—250. 4°.

H. SCHLEGEL. Muséum d'histoire naturelle des Pays-Bas. Revue méthodique et critique des collections déposées dans cet établissement. Leide 1880. Tome VIII. 8°.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1880. Afl. 5. 2de Gedeelte. 4°.

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische vereeniging. 's Gravenhage 1880. Deel XXIII. Afl. 3. 8°.

Beschrijving der schilderijen in 's Rijks verzameling van kunstwerken van moderne meesters in het paviljoen Welgelegen te Haarlem. 's Gravenhage 1880. 8°.

J. A. FRUIN. De Nederlandsche wetboeken. Utrecht en 's Gravenhage 1880. Afl. 13. 8°.

A. A. DE PINTO. Handleiding tot de wet op de regterlijke organisatie en het beleid der justitie. Zwolle 1880. 2de Druk. 1ste en 2de Gedeelte. 8°.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Augustus 1880. 's Gravenhage 1880. Nieuwe Serie. fol.

Statistiek van den in-, uit- en doorvoer over het jaar 1879. 's Gravenhage 1880. 1ste Gedeelte. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Geneeskundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige wetenschappen in Ned.-Indië. Batavia 1880. Nieuwe Serie. Deel IX. Afl. 3—4. 8°.

Het vijftigjarig jubilé van den Heer JOHANNES ELIAS TEYSMANN. Batavia 1880. 8°. (Overgedrukt uit het Tijdschrift der Maatschappij van nijverheid en landbouw in Nederl.-Indië.)

Robinson Crusoë, naar het hollandsch van GERARD KELLER door Raden KARTA WINATA (in het Soendaasch). Batavia 1879. 8°.

Reizen van Mars Ario Poerwo Lelana. 2de Deel. 8°.

Pada menjatakan peladjaran berhitoeng, jang akan ditjahari didalem pikiran dan dibatoe-toelis terkarang oleh kadoa kami J. L. VAN DER TOORN dan L. H. HARMSEN. Batawi 1880. 8°.

Handleiding tot de beoefening der madoereesche taal met woordenboek, door W. J. ELSEVIER STOKMANS en J. C. P. MARINISSEN. Soerabaia, Goes 1880. 8°.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Batavia 1879. Vol. IV. fol.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. 3e Série. Tome XIV. N°. 8. 8°.

Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Lierre par M. le baron O. VAN ERTBORN avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8°.

Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Putte par M. le baron O. VAN ERTBORN avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8°.

Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Heyst-op-den-Berg par M. le baron O. VAN ERTBORN avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1880. Tome XCI. N°. 12—16. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1880. 2e Série. Tome IX. N°. 37—38, 40—42. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1880. Tome XXVII. Revue bibliographique D. 8°.

V. DURUY. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1880. Livr. 134—137. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1880. 6e Année. Vol. V. N°. 209—213. 4°.

ROBINSKI. De l'influence des eaux malsaines sur le développement du typhus exanthématique démontrée par des observations. Paris 1880. 8°.

Annales de la Faculté des lettres de Bordeaux. 1879. N°. 1—4. 1880. N°. 1—3. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Society. London 1880. Vol. XXXI. N°. 206. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1880. New Series. Vol. II. N°. 10. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1880. Vol. III. N°. 5. 8°.

Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1880. Vol. X. N°. 1. 8°.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London for the year 1880. Part. 3. 8°.

Catalogue of oriental coins in the British Museum. Vol. V. The coins of the moors of Africa and Spain and the kings and imáms of the yemen in the British Museum by STANLEY LANE POOLE. London 1880. 8°.

Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin 1879. Science. Vol. XXVI. N°. 22. 4°.

Inhoud:

J. P. O. REILLY. Explanatory notes and discussion of the nature of the prismatic forms of a group of columnar basalts, giant's causeway.

Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin 1880. Irish manuscript series. Vol. I. Part. 1. 4°.

Inhoud:

WHITLEY STOKES. On the calendar of oengus.

Royal Irish Academy. "Cunningham Memoirs". Dublin 1880. N°. 1. 4°.

Inhoud:

J. CASEY. On cubic transformations.

Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin 1879—1880. *Polite litterature and antiquities.* 2d Series. Vol. II. N°. 1. *Science.* 2d Series. Vol. III. N°. 4. 8°.

J. HENRY. Aeneidea or critical, exegetical, and aesthetical remarks on the Aeneis. Dublin 1879. Vol. II. (continued). 8°.

OOSTENRIJK.

Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1879. Band XLI. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe). 4°.

Inhoud:

STEINDACHNER. Ueber einige neue und seltene Fisch-Arten aus den k. k. Zool. Museen zu Wien, Stuttgart und Warschau.

FRITSCH. Jährliche Periode der Insectenfauna von Oesterreich-Ungarn. IV. Die Schmetterlinge.

STEINDACHNER. Beiträge zur Kenntniss der Flussfische Süd-Amerika's.

TOLDT. Bau und Wachsthumsveränderungen der Gekröse des menschlichen Darmkanales.

PUCHTA. Das Oktaëder und die Gleichung vierten Grades.

FUCHS. Ueber die von Dr. E. TIETZE aus Persien mitgebrachten Tertiärversteinerungen.

VON MARENZELLER. Südjapanische Anneliden. I. Amphinomea, Aphroditea, Lycoridea, Phyllodocea, Hesconea, Syllidea, Eunicea, Glycerea, Hernaspidea, Chaetopterea, Cerratulea, Amphictonnea.

KERSCHNER. Ueber zwei neue Notodelphyiden nebst Bemerkungen über einige Organisationsverhältnisse dieser Familie.

SZAJNOCHA. Die Brachiopoden-Fauna der Oolithe von Balin bei Krakau.

Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880. Band XXX. (Philosophisch-historische Classe). 8°.

Inhoud:

MIKLOSICH. Ueber die Wanderungen der Rumunen in den Dalmatischen Alpen und den Karpaten.

KUICALA. Studien zu Euripides. II.

MIKLOSICH. Ueber die Mundarten und die Wanderungen der Zigeuner Europa's. No. IX—X.

PFIZMAIER. Der Anfang der Japanischen Erklärungen der Werke des kleinen Sprechens.

——— Darlegung der chinesischen Aemter (Schluss).

Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1879—1880. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 1ste Abth. Band LXXIX. Heft 1—5. Band LXXX. Heft 1—5. 2te Abth. Band LXXIX. Heft 4—5. Band LXXX. Heft 1—5. Band LXXXI. Heft 1—3. 3te Abth. Band LXXX. Heft 1—5. Band LXXXI. Heft 1—3. 8°.

Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1879—1880. Philosophisch-historische Classe. Band XCIV. Heft 1—2. Band XCV. Heft 1—4. Band XCVI. Heft 1. 8°.

Archiv für oesterreichische Geschichte, herausgegeben von der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1879—1880. Band LIX. Band LX. 1ste Hälfte. 8°.

Fontes rerum austriacarum. Oesterreichische Geschichts-Quellen, herausgegeben von der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Band XLII. 2te Abth. 8°.

DUITSCHLAND.

Preussische Statistik, herausgegeben vom kön statistischen Bureau in Berlin. 1880. N°. 54. fol.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1880. Heft 3—4 Oblong.

Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereins zu Hamburg. 1880. Band VII. Abth. 1. 4°.

Inhoud:

G. H. KIRCHENPAUER. Ueber die Bryozoen-Gattung Adeona
P. BLEEKER. Musei Hamburgensis species piscium novae minusque cognitae.
H. BOLAU. Ein neuer Hirsch aus dem Amurlande.
C. M. GOTTSCHE. Neuere Untersuchungen über die Jungermanniae Geocalyceae.
G. PFEFFER. Die Pteropoden des Hamburger Museums.

Verhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins von Hamburg-Altona. Hamburg 1880. Neue Folge. Band IV. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1880. 3te Jahrg. N°. 66—67. 8°.

Zeitschrift des Vereins für Thuringische Geschichte und Alterthumskunde. Jena 1852—1880. Band I—VIII. Neue Folge. Band I, II. Heft 1—2. 8°.

A. L. J. MICHELSEN. Der Mainzer Hof zu Erfurt am Anfange des Mittelalters. Jena 1853. 4°.

——————— Ueber die Ehrenstücke und den Rautenkranz als historische Probleme der Heraldik. Jena 1854. 4°.

——————— Die Rathsverfassung von Erfurt im Mittelalter. Jena 1855. 4°.

——————— Urkundlicher Ausgang der Grafschaft Orlamünde. Jena 1856. 4°.

——————— Die ältesten Wappenschilde der Landgrafen von Thüringen. Jena 1857. 4°.

——————— Johann Friedrich's des Grossmüthigen Stadtordnung für Jena. Jena 1858. 4°.

A. L. J MICHELSEN. Codex Thuringiae diplomaticus. Jena 1854. Lief. 1. 4°.

Thüringische Geschichtsquellen, herausgegeben vom Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde. Jena 1854—1859. Band I—III. 8°.

A. L. J. MICHELSEN. Rechtsdenkmale aus Thüringen, herausgegeben vom Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde. Jena 1863. 8°.

ITALIË.

P. MANTEGAZZA. Archivio per l'antropologia e la etnologia. Firenze 1880. Vol. X. Fasc. 2. 8°.

F. BATTAGLIA-RIZZO. Pochi cenni intorno ad un nuovo fossile rinvenuto nell'ex-castello Termini-Imerese. gr. 4°.

PORTUGAL.

J. F. J. BIKER. Supplemento a collecção dos tratados e actos publicos celebrados entre a coroa de Portugal e as mais potencias desde 1640. Lisoba 1880. Tomo XI, XVI. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Entomologisk tidskrift, utgifven af J. SPANGBERG. Stockholm 1880. Band I. Häft 2. 8°.

RUSLAND.

Bulletin de l'Académie impériale des sciences. St. Pétersbourg 1880. Tome XXVI. N°. 2. gr. 4°.

Sitzungsberichte der Kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst aus dem Jahre 1879. Mitau 1880. 8°.

Meddelanden af Societas pro fauna et flora fennica. Helsingfors 1880. Häftet 5. 8°.

AMERIKA.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Tomo V. N°. 151—163. fol.

Anales del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Tomo III. 8°.

Annales Brazilienses de medicina, jornal da Academia imperial de Medicina do Rio de Janeiro. 1880. Tomo XXXI. N°. 1—4. 8°.

Bibliographia pelo dr. José Pereira Rego Filho, alguns dados relativos à estatistica medica da cidade de Buenos-Ayres durante o anno de 1876 por EMILIO R. CONI. Rio de Janeiro 1877. 8°.

Relatorio dos trabalhos Academicos de 30 de Junho de 1875 a 30 de Junho de 1879 apresentado a Academia imperial de Medicina do Rio de Janeiro. 1879—1880. 8°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1880. Tomo X. Entr 3. 8°.

AANGEKOCHT.

Bibliotheca belgica. Livr. 9. 8°.

Journal des savants. Paris Septembre 1880. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1880. 2e Série. Tome IV. Mars—Avril. 8°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1880. 5e Série. Tome XXI. Octobre. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1880. 5th Series. Vol. VI. N°. 34. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1880. 5th Series. Vol. X. N°. 62. 8°.

Mittheilungen der k. k. Central-Commission zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale. Wien 1880. Neue Folge. Band VI. Heft 3. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1880. St. 37—42. 8°.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1880. Band IV. St. 8—9. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1880. Band CCXXXVII. Heft 6. Band CCXXXVIII. Heft 1—2. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne, Genève 1880. 3e Période. Tome VII .N°. 9. Archives. 3e Période. Tome IV. N°. 9. 8°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. New Series. Vol. XLIX. Part 1. N°. 1. Part 2. N°. 1.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. N°. 4—6. 8°.

DOUBLETTEN DER UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM, DOOR RUIL VERKREGEN.

Reformatie der lantrechten, gebruycken und gewoontheyden der graefschap Zutphen. Ghedrukt tot Arnhem, bij Jan Janssen 1604. 4°.

Gereformeert lantrecht van Veluwen und Veluvvenzoom. Mit de veranderongh opt capittel van appellatien en de clarongen aen engellander holdt gevallen. Ghedruckt tot Arnhem, bij Jan Janssen 1621. 4°.

Nicolai Tulpii Amstelredamensis Observationum medicarum libri tres. Amstelredami 1641. 8°.

Kort begrip leerende recht duidts spreken, oock waarheit van valsheit te scheyden. Alles uytghegheven bij de kamer in liefd bloeyende t' Amstelredam. Wormerveer, bij W. Symonsz Boogaart, 1649. 8°.

De Chirurgie, ende opera van alle de wercken van Mr. AMBROSIUS PARÉ, raedt ende opperste chirurgijn van vier koningen in Vranckrijk. Uut de francoijsche sprake overgeset door D. CAROLUM BATTUM. tot Amstelredam, bij J. J. Schipper 1649. fol.

Amphitheatrum physiognomiae medicum, dat is schouwplaets der medicinale gesicht-konst, door J. F. HELVETIUM. in 's Gravenhage bij Levyn van Dyck, 1664. 8°.

J. V. VONDELS historische treurspelen. 't Amsterdam voor A. de Wees 1652. 4°.

J. VAN VONDEL. De helden Godes des ouwden verbonds. — Tooneel des menschelijken levens. — Vorstelycke warande der dieren. — t'Amsteldam bij Wed. G. DE GROOT. 1699. 4°.

J. VAN VONDELS Treurspelen. 't Amsterdam bij JOANNES OOSTERWIJK 1720. 2 Dl. 4°.

Manuale operatien, zijnde een nieuw ligt voor vroed-meesters en vroed-vrouwen enz. door HENDRIK VAN DEVENTER. 's Gravenhage 1701. 4°.

JANI BROUKHUSII poematum libri sedecim editore D. HOOGSTRATANO. Amstelaedami 1711. 4°.

Atrocis, nec descripti prius morbi historia. Secundum medicae artis leges conscripta ab HERMANNO BOERHAAVE. Lugduni Bat. 1724. 8°.

Atrocis rarissimique morbi historia altera, conscripta ab HERMANNO BOERHAAVE. Lugduni Bat. 1728. 8°.

P. M. JANIÇON. De republiek der vereenigde Nederlanden. 's Gravenhage 1736. 2de druk. 4 Dl. 8°.

Privilegien, willekeuren en ordonnantien, betreffende het collegium chirurgicum Amstelaedamense. 't Amsterdam bij PIETER VAN DEN BERGE, 1736. 4°.

Tractatio medico-practica de lue venerea. Publica lectio habita à clarissimo viro HERMANNO BOERHAAVE. Lugduni Bat. 1751. 8°.

HERMANNI BOERHAAVE, praelectiones academicae de morbis nervorum, quas ex auditorum manuscriptis collectas edi curavit JACOBUS VAN EEMS. Lugduni Bat. 1761. Tom. 1. 8°.

P. VAN HEMERT. Magazijn voor de critische wijsbegeerte en de geschiedenis van dezelve. Amsterdam 1799. 6 Dl. 8°.

Nouvelles extraordinaires de divers endroits (Gazette de Leyde) années 1793—1804. 4°.

N. G. VAN KAMPEN. Magazijn voor wetenschappen, kunsten en letteren. Amsterdam 1822—1830. Dl. I—III, V—X. 8°.

Gedenkstuk der feestviering van het vijftigjarig bestaan der Maatschappij Felix Meritis. November 1827. 8°.

Précis de la campagne de Java, en 1811; par le duc BERNARD DE SAXE WEIMAR EISENACH. La Haye 1834. 8°.

Athenaeum. Tijdschrift voor wetenschap en kunst. 's Gravenhage 1836—1837. 4 Dl. 8°.

De koninginnen Maria Stuart en Elisabeth; naar het Hoogduitsch van F. VON RAUMER. 's Gravenhage 1838. 2 Dl. 8°.

A. VROLIK. Verslag van al het verrigte tot herstel van het Nederlandsch muntwezen, van het jaar 1842 tot en met 1851. Utrecht 1853. 8°.

P. P. ROORDA VAN EYSINGA. Voorlezingen over kolonisatie door Nederlanders in Nederlandsch Indië; en gedeeltelijke vergelijking van de Indische Maatschappij met die van Nederland. Haarlem 1856. 8°.

Lijst der boeken behoorende aan het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Utrecht 1864. 8°.

P. DE BOER. Specimen botanicum inaugurale de coniferis archipelagi indici. Traiecti ad Rh. 1866. 4°.

T. C. WINKLER. Ons drinkwater en onze duinen. Haarlem 1867. 8°.

J. W. R. TILANUS. Inwijdingsrede over de opvolgende rigtingen bij de beoefening der heelkunde. Amsterdam 1868. 8°.

Congrès international des américanistes. Compte rendu de la 2e Session, Luxembourg 1877. Luxembourg – Paris 1878. 2 Dl. 8°.

H. VALLEROUX. De l'assistance sociale ce qu'elle a été, ce quelle est, ce qu'elle devrait être. Paris 1855. 8°.

A. GUBLER. Commentaires thérapeutiques du codex medicamentarius, ou histoire de l'action physiologique et des effets thérapeutiques des médicaments inscrits dans la pharmacopée française. Paris 1868. roy. 8°.

J. H. MERLE D'AUBIGNÉ. Le protecteur ou la république d'Angleterre aux jours de Cromwell. Paris—Genève 1848. 8°.

Memoir of the life and public services of Sir THOMAS STAMFORD RAFFLES, particularly in the government of Java, 1811—1816, and of Bencoolen and its dependencies, 1817—1824; with details of the commerce and resources of the eastern archipelago and selections from his correspondence. London 1830. 4°.

TH. CARLYLE. Oliver Cromwell's letters and speeches. New-York 1856. 2 Vol. 8⁰.

F. MAX MÜLLER. Lectures on the origin and growth of religion as illustrated bij the religions of India. London 1878. 8⁰.

O. WENDELL HOLMES. John Lothrop Motley. (a memoir). London 1878. 8⁰.

C. LASSEN. Zur Geschichte der griechischen und indo-skythischen Könige in Baktrien, Kabul und Indien durch Entzifferung der altkabulischen Legenden auf ihren Münzen. Bonn 1838. 8⁰.

L. DIEMER. Abhandlung über die Heilwirkung der Aachener Schwefelthermen in constitutioneller Syphilis und Quecksilberkrankheiten. Aachen 1862. 8o.

F. MOHR. Lehrbuch der pharmaceutischen Technik. 3te Auflage. Braunschweig 1866. 8⁰.

H. SCHELLEN. Die spectralanalyse in ihrer Anwendung auf die Stoffe der Erde und die Natur der Himmelskörper. Braunschweig 1870. 8⁰.

W. MANNHARDT. Antike Wald- und Feldkulte aus Nordeuropäischer Überlieferung erläutert. Berlin 1877. 8⁰.

C. BALBO. Lettere di politica e letteratura. Firenze 1855. 8⁰.

Irenicum irenicorum seu mediatoris christianorum hodiernorum norma triplex, sana omnium hominum ratio, scriptura sacra et traditiones (1658). kl. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND NOVEMBER 1880.

Handelingen van de algemeene vergadering der Maatschappij tot nut van 't algemeen. 1880. 8°.

S. HOEKSTRA BZN. De tegenstelling van optimisme en pessimisme, vooral uit het oogpunt van hare wetenschappelijke waarde. Amsterdam 1880. 8°.

Shakespeare's dramatische werken, vertaald en toegelicht door A. S. KOK. Amsterdam 1880. 7 Dl. 8°.

M. V. NUNES DA COSTA. Aperçu sur les évènements politiques de 1848, et sur les moyens les plus propres à rétablir la paix et la tranquillité en Europe. Amsterdam (1854). 4°.

J. SWART. Tijdschrift voor het zeewezen. Amsterdam 1880. N°. 2. 8°.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des sciences à Harlem. 1880. Tome XV. Livr. 3—4. 8°.

G. C. J. VOSMAER. Aanteekeningen over Leucandra aspera H. Bijdrage tot de kennis der kalksponzen. Leiden 1880. (Academisch proefschrift). 8°.

Tribunal mixte du Caire. Supplément du droit. (Janvier 78—Mars 80). 8°.

T. M. C. ASSER. De Scandinavische wisselwet van 1880, vergeleken met het Duitsche, het Nederlandsche en het Belgische wisselregt. 's Gravenhage 1880. 8°.

Verslag van het verhandelde in de algemeene vergadering van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetenschappen, gehouden den 24 Juni 1879 en 29 Juni 1880. 8°.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetenschappen, ter gelegenheid van de algemeene vergadering, gehouden den 24sten Juni 1879. Utrecht 1879. 8°.

Registers op de aanteekeningen van het verhandelde in de vergaderingen der sectiën van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetenschappen, over de jaren 1845 tot en met 1878. Utrecht 1879. 8°.

J. M. J. VALETON. De Polybii fontibus et auctoritate disputatio critica. Edidit Societas artium disciplinarumque Rheno-traiectina. Traiecti ad Rh. 1879. 8°.

J. G. R. ACQUOY. Het klooster te Windesheim en zijn invloed. Deel III. Uitgegeven door het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Utrecht 1880. 8°.

C. B. DANIËLS. Het leven en de verdiensten van Petrus Camper. Prijsverhandeling, bekroond en uitgegeven door het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Utrecht 1880. 4°.

Nederlandsch meteorologisch jaarboek voor 1876, uitgegeven door het Kon. Nederlandsch Meteorologisch Instituut. Utrecht 1880. Jaarg. 25. Deel II. 4°. Oblong.

Archief. Vroegere en latere mededeelingen voornamelijk in betrekking tot Zeeland, uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der wetenschappen. Middelburg 1880. Deel V. St. 1. 8°.

Mededeelingen en berichten der Geldersche Maatschappij van landbouw over 1880. Zutphen 1880. N°. 2. 8°.

Algemeen verslag gedaan te Groningen in de jaarlijksche vergadering van contribueerende leden, gehouden den 28 Juni 1880, wegens het Instituut voor doofstommen, aldaar opgericht in den jare 1790. 8°.

J. DIRKS. Penningkundig repertorium. N°. XVII—XVIII. 8°.

Uitkomsten van de in 1879 uitgevoerde nauwkeurigheidswaterpassing. VII. Amsterdam—Roermond. VIII. Kuilenburg—Gorinchem. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de Schelde, enz., waargenomen in de maand Maart 1880. 's Gravenhage 1880. fol.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand September 1880. 's Gravenhage 1880. Nieuwe Serie. fol.

Statistiek van den in-, uit- en doorvoer over het jaar 1879. 's Gravenhage 1880. 2de gedeelte. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Ned. Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1880. Deel XXV. Afl. 8. 8°.

Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Batavia 1880 Deel XXXIX. 8°.

BELGIË.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. Tome VI. Fasc. 2. 8°.

Inhoud :

É. DESMET. Des rétrécissements du canal de l'urèthre envisagés au point de vue de l'étiologie, de l'anatomie pathologique et du traitement.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. 3e Série. Tome XIV. N°. 9. 8°.

XXVe Anniversaire de la Société entomologique de Belgique. Assemblée générale extraordinaire convoquée pour la commémoration de la fondation de la Société. Bruxelles 1880. 8°.

Coutumes des pays et comté de Flandre. Coutumes du franc de Bruges, par L. GILLIODTS VAN SEVEREN. Tome III. Bruxelles 1880. 4°.

Jaarboek van het Willems-fonds voor 1881. Gent 1880. 8°.

F. DE POTTER en J. BROECKAERT. Geschiedenis van de gemeenten der provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1880. Deel XXVII. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1880. Tome XCI. N°. 17—20. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1880. 2me Série. Tome IX. N°. 43—46. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1880. Tome XXVII. Comptes rendus 4. 8°.

V. DURUY. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1880. Livr. 139—142. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1880. 6e Année. Vol. V. N°. 214—217. 4°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1880. 3e Année. N°. 10. 8°.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 1880. 2e Série. Tome III. N°. 3. 8°.

Inhoud :

P. TANNERY. L'arithmétique des Grecs dans Pappus.
G. DARBOUX. Note sur deux intégrales elliptiques, qui se présentent sous forme indéterminée.
P. GLOTIN. Navigation orthodromique.
——— Résolution des triangles sphériques par des triangles rectilignes, sur une projection gnomonique.
A. BAUDRIMONT. Évaporation de l'eau sous l'influence de la radiation solaire ayant traversé des verres colorés.
U. GAYON. Action des vapeurs toxiques et antiseptiques sur la fermentation des fruits.
——— Sur la transformation du sucre dans les fruits au sirop.
——— Analyses de quelques sucres rares.
——— Sur les variations de poids des blés avariés.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique de la Société d'agriculture, sciences et arts de l'arrondissement de Valenciennes. 1880. Tome XXXIII. N°. 8—9. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1880. Vol. XL. N°. 9. Supp. number. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1880. New Series. Vol. II. N°. 11. 8°.

The scientific transactions of the Royal Dublin Society. Dublin 1877—1880. New Series. Vol. I. N⁰. 1—12. Vol. II. N⁰. 1. 4⁰.

Inhoud. Vol, I.:

1. H. GRUBB. On great telescopes of the future.
2. G. JOHNSTONE STONEY. On the penetration of heat across layers of gas.
3. W. ERCK. On the satellites of Mars.
4. G. JOHNSTONE STONEY. On the mechanical theory of Crookes's, or polarization stress in gases.
5. G. F. FITZGERALD. On the mechanical theory of Crookes's forces.
6. J. L. E. DREIJER. Notes on the physical appearance of the planet Mars, as seen with the three-foot reflector at Parsonstown, during the opposition of 1877.
7. E. HULL. On the nature and origin of the beds of chert in the upper carboniferous limestone of Ireland.
   E. T. HARDMAN. On the chemical composition of chert and the chemistry of the process by which it is formed.
8. G. F. FITZGERALD. On the superficial tension of fluids and its possible relation to muscular contractions.
9. T. R. ROBINSON. Places of one thousand stars observed at the Armagh Observatory.
10. G. F. FITZGERALD. On the possibility of originating wave disturbances in the ether by means of electric forces.
11. E. HULL. On the relations of the carboniferous, devonian, and upper silurian rocks of the south of Ireland to those of North Devon.
12. C. E. BURTON. Physical Observations of Mars, 1879—80.

Vol. II.:

1. ROSE. Observations of nebulae and clusters of stars made with the six-foot and three-foot reflectors at Birr Castle, from the year 1848 up to about the year 1878.

The scientific proceedings of the Royal Dublin Society. Dublin 1877—1880. New Series. Vol. I. Part 1—3. Vol. II. Part. 1—6. 8⁰.

Journal of the Royal Dublin Society. Dublin 1878. N⁰. XLV. Vol. VII. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt. Wien 1880. Band XXX. N⁰. 1—3. 8⁰.

Verhandlungen der k. k. Geologischen Reichsanstalt. Wien 1880. N⁰. 1—11. 8⁰.

Mittheilungen der Anthropologischen Gesellschaft in Wien. 1880. Band IX. N⁰. 11—12. Band X. N°. 1—7. 8⁰.

F. KANITZ. Die Ethnographie auf der Pariser „Exposition des sciences anthropologiques". 8⁰.
(Auszerordentliche Beilage zu den „Mittheilungen der Anthropologischen Gesellschaft in Wien").

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Innsbrück 1880. 3th Folge. Heft 24. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Abhandlungen der kön. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1879. Berlin 1880. 4⁰.

Inhoud:

RAMMELSBERG. Die Chemische Natur der Meteoriten.
ROTH. Beiträge zur Petrographie der plutonischen Gesteine.
VIRCHOW. Beiträge zur Landeskunde der Troas.
SCHOTT. Kitai und Karakitai ein Beitrag zur Geschichte Ost- und Innerasiens.
KRUEGER. Codicis Theodosiani fragmenta Taurinensia.
CURTIUS. Das archaische Bronzerelief aus Olympia
FURTWAENGLER. Die Bronzefunde aus Olympia und deren kunstgeschichtliche Bedeutung.
ZELLER. Ueber das Kantische Moralprincip und den Gegensatz formaler und materialer Moralprincipien.
BUSCHMANN. Die Ordinalzahlen der mexicanischen Sprache.
ERDMANN. Ueber die Wiener und Heidelberger Handschrift des Otfrid.
SCHRADER. Zur Kritik der Inschriften Tiglath-Pileser's II, des Asarhaddon und des Asurbanipal.

Monatsbericht der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1880. Juli—August. 8°.

R. VIRCHOW. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1880. Band LXXXI. Heft 3. Band LXXXII. Heft 1. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1880. Heft 5—6. Oblong.

Schriften der physikalisch-ökonomische Gesellschaft zu Königsberg. 1878—1880. Jahrg. 18—20, 21. Abth. 1. 4°.

Geologische Karte der prov. Preussen. Sect. 14. Heiligenbeil. Plano.

Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. 1879—1880. Band VI. Heft 2—3. 8°.

Beilage N°. 7 zu den Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Bremen. 1879. 8°.

Tabellen über den Flächeninhalt des Bremischen Staats, die Höhenverhältnisse, den Wasserstand der Weser, den Stand des Grundwassers und die Wetterungsverhältnisse in den Jahren 1877 und 1878.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. 1880. Band XIV. Heft 3—4. 8°.

19ster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1880.

R. HOPPE. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1880. Teil LXV. Heft 3. 8°.

MEDEDEELING

BETREFFENDE DE

STERREBEELDEN,

#276
ack. Aug 21/82

DE HOOGTE BOVEN DEN HORIZON, OP EEN BEPAALD OOGENBLIK VAN DEN NACHT, DOOR DE JAVANEN TEN BEHOEVE VAN DEN LANDBOUW GERAADPLEEGD WORDT,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.

Op uitnoodiging der Ned. Indische Regeering arbeidende ik eene *Wereldbeschrijving voor de inlandsche scholen*, waarvan reeds twee stukjes uitgegeven en nog twee andere volgen, maar nog niet gedrukt zijn, tracht ik daarin bij elk onderwerp zooveel mogelijk af te dalen tot, of uit te gaan van de kennis, die de bewoner van Nederlandsch-Indië, hetzij Javaan, hetzij Europeaan, van de verschijnselen, die beschreven of verklaard worden, kan geacht worden te bezitten.

Zoo had ik onlangs de verschijnselen te bespreken, die bekend zijn onder den naam van heliasche opkomst en heliasche ondergang der sterren. Bij Egyptenaren, Grieken en Romeinen werden die verschijnselen steeds gebruikt om den landbouw naar te regelen, zooals in tallooze oude schrijvers geschreven is. Voor zoover mij bekend is doen onze boeren dat niet, maar raadplegen den almanak; en in een klimaat, waar de heliasche opkomst of ondergang der sterren wegens bewolkenheid der lucht dikwijls zeer moeilijk waar te nemen is, is dat ook veel eenvoudiger. Het is ook alleen aan te nemen dat volken, bij wie de kalender niet zoo dagelijks in

toepassing komt, als dit bij de tegenwoordige beschaafde natiën het geval is, nog voor het zaaien of planten een kosmisch verschijnsel zullen raadplegen.

Ik vermoedde wel dat sommige volken van den O. Indischen Archipel in dit opzicht op dezelfde hoogte zouden staan als de Grieken en Romeinen. Hoewel het nederlandsch bestuur alleen de gregoriaansche tijdrekening gebruikt, is het toch bekend dat bij de oostersche volken, voor zoover zij Mahomedanen zijn, algemeen de arabische tijdrekening. de Hidjrah, gevolgd wordt, en daar in deze de jaren 354 of 355 dagen lang zijn, is zij voor de regeling van den landbouw ten eenenmale ongeschikt: het Arabische nieuwe jaar bijv. loopt in 33 van onze jaren omtrent het geheele tropische of gregoriaansche jaar door.

Nu dient zich de landbouwer wel in de eerste plaats te houden aan de opvolging der jaargetijden of moessons, maar de overgangen, bij ons van het eene jaargetijde in het andere, daar ginds van de eene moesson in de andere, is zoo moeilijk aan te geven, en wordt door de veranderlijkheid van het weder in zulke mate vervroegd of vertraagd, dat het zeer goed te begrijpen is, dat volken, die nog op eenen lagen trap van beschaving staan, en die niet in het bezit zijn van eene tijdrekening, die de lengte van het tropische jaar ten grondslag heeft, uitzien naar een middel om een bepaald tijdstip van het zonne-, d. i. van het tropische jaar aan te geven.

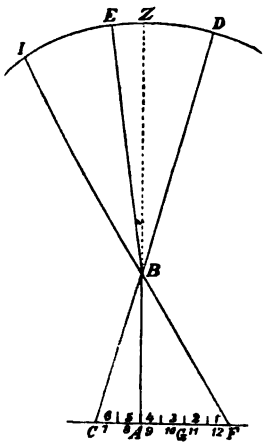
De Javanen maken daartoe gebruik van de schaduwen, die hetzij een vertikaal staande stijl AB, hetzij het menschelijk lichaam op den middag werpt. Java strekt zich uit ongeveer van $5^0 50'$ tot $8^0 30'$ zuiderbreedte, neemt men dus eene gemiddelde breedte van 7^0 en voor de helling der ekliptika $23^1/_2$ aan, dan is de zenithsafstand ZI der zon bij den zomerzonnestilstand, den 21sten Juni, $30^1/_2{}^0$ ten noorden, en bij den winterzonnestilstand, den 22sten December $ZD = 16^1/_2{}^0$ ten zuiden.

Wij hebben dus

Middagschaduw den 21 Juni $= AF = AB\,tg\,30^1/_2{}^0 = 0{,}5890\,AB$

» » 22 Dec. $= AC = AB\,tg\,16^1/_2{}^0 = 0{,}2962\,AB$

Men ziet hieruit dat AF voor midden-Java nagenoeg $= 2AC$ is. De Javanen hebben van deze eigenschap der middagschaduwen gebruik gemaakt om hun zonnejaar in twaalf ongelijke maanden, mongso's genaamd, te verdeelen. De lijn AC namelijk in 2 en de lijn AF in 4 gelijke deelen verdeelende, zijn deze deelen van beide lijnen gelijk, en dus de geheele lijn CF in 6 gelijke deelen verdeeld. Nu beweegt zich de schaduw van het punt B in één jaar van F naar C en terug van C tot F, en zij doorloopt dus in een jaar 2 maal die 6, dus 12 deelen. Daarop berust de verdeeling des jaars in 12 mongso's, die, zooals licht te begrijpen is, van ongelijke lengte zijn. Hoe weinig zeker de Javanen in deze hunne *tropische* tijdrekening waren, kan daaruit blijken, dat de mongso's, elk op zich zelf, niet overal even lang werden aangenomen en in de javaansche boeken ook niet altijd dezelfde lengte voor de mongso's werden aangegeven. Ja, als men de dagen die voor de mongso's gewoonlijk opgegeven werden, optelde, dan was de som niet 365 dagen, maar de meeste opgaven kwamen slechts tot 360 of 362 dagen.



Op voorstel van wijlen den heer A. B. COHEN STUART, heeft de Soesoehoenan van Soerakarta, Pakoe Boewono VII, in 1855 het mongso-jaar geregeld, zoodat het ten minste gemiddeld met het juliaansche gelijk loopt. De eerste dag van het mongso-jaar komt nu overeen met den 21sten of 22sten Juni, en de 12 mongso's hebben nu achtereenvolgens de onderstaande lengten: 41, 23, 24, 25, 27, 43, 43, 26, (of in een schrikkeljaar 27) 25, 24, 23, 41 dagen, te zamen 365 of 366 dagen.

De nieuwe indeeling heet in het javaansch Pranato-mongso; de 1e dag van het jaar 1 der Pranato-mongso is geweest de 22ste Juni 1855, en in deze tijdrekening zijn,

evenals in de juliaansche tijdrekening, de jaren 4, 8, 12, 16 enz., schrikkeljaar. Deze schrikkeljaren vallen dus niet met de onze samen, en van daar dat de begindagen der mongo's niet op één vasten dag van ons jaar vallen, maar een of twee dagen kunnen verschillen.

Hoewel ik nu bekend was met deze indeeling, waardoor aan de behoefte van den landbouw tot op eene zekere hoogte voldaan wordt, oordeelde ik het toch niet onwaarschijnlijk, dat, onafhankelijk van de middagschaduwen, en dus onafhankelijk van de mongso-rekening, ook wel voor den landbouw op de heliasche opkomst en ondergang van sterren of sterrebeelden zoude gelet worden.

Te vergeefs trachtte ik daaromtrent hier te lande inlichtingen in te winnen; het eenige, wat ik vond, was eene zinsnede, in het Dajaksche woordenboek, door den zendeling HARDELAND vervaardigd. Prof. VETH had de goedheid, mij daarop opmerkzaam te maken. Die zinsnede, voorkomende op het artikel *bintang*, ster, luidt aldus: »*Salampatar*, oder *bintang patendo*, der Orion. Der Orion (die drei grossen Sterne im Gürtel) bestimmt die Zeit des Reispflanzes, wenn er nämlich Abends mit dem Dunkel werden im Zenith steht."

Neemt men de rechte opklimming van ε Orionis, de middelste ster in den gordel van Orion, aan op $5^u\ 30^m$, en voor het donker worden des avonds half zeven, ware tijd, dan komt er voor den dag, die door den beschreven stand aangewezen wordt, 3 of 4 Maart. Op Java is op dezen tijd van het jaar de padi bijna rijp, de regentijd loopt dan op zijn eind.

Ik heb dus nu rechtstreeks op Java zelf mijne inlichting gezocht en geloofde dit niet beter te kunnen doen dan te schrijven aan den regent van Koedoes, raden Mas Adipati Ario Tjondro Negoro, die eene europeesche opvoeding genoten heeft, en daardoor ook het best in staat is, de bedoeling der gedane vragen te vatten, en een voldoend antwoord te geven; iemand die ook menigmaal, ook mij, zijne welwillendheid voor het geven van inlichtingen getoond heeft.

Ik ontving bij een schrijven, gedateerd 20 Februari jl., van hem het gewenschte antwoord, waaruit mijn vermoeden, dat de Javaansche landbouwer ook sterren raadpleegt, bewaar-

heid werd. In het kort komt het gebruik hierop neder, dat de Javaan van twee sterrebeelden, namelijk: 1°. de gordel en het zwaard van Orion, en 2°. de Pleiaden, de hoogte boven den horizon schat, hetzij bij het vallen van den avond, dus ongeveer een half uur na zonsondergang, hetzij des morgens bij het onzichtbaar worden der meeste sterren, dus ongeveer een half uur voor zonsopkomst, en dat eene zekere maat van die hoogten, door den regent Tjondro Negro aangegeven in graden, maar die, zoo als een nader van hem ontvangen schrijven mij bevestigde, door den landbouwer zelven op de gis geschat worden, de verschillende mongso's aangeeft.

Ik vond het niet onbelangrijk eens na te gaan hoe nauwkeurig deze opgaven met de waarheid overeenstemden, en heb ze daarom aan de berekening getoetst. Daartoe nam ik aan voor de zuidelijke breedte der waarnemingsplaats 7°:

voor ε Orionis R.O. $= 5^u\ 30^m$ en $\delta = -\ 1^0\ 17'$,
voor η Tauri $\quad 3\ \ 40 \quad\quad +\ 23\ \ 44.$

Daar verder in de opgaven van den regent niet duidelijk aangegeven was, of de astronomische hoogten der genoemde sterrebeelden voor het begin of voor het midden voor elke mongso golden, zoo heb ik aangenomen voor het midden, daar dan, door vergelijking van mijne resultaten met de opgaaf, van zelf wel blijken zoude, of die opvatting goed was. Inderdaad gaf deze vergelijking zoowel verschillen in den éénen als in den anderen zin, zoodat het schijnt dat het tijdperk, waarvoor de opgaven gelden, ook niet veel juister is aan te geven, dan ongeveer het midden van elke mongso.

Ten einde nu ook anderen in de gelegenheid te stellen de opgaven van den regent te raadplegen, zal ik een gedeelte van den ontvangen brief en de geheele opgaaf zelve, de laatste woordelijk, mededeelen, (hoewel er ook aanwijzingen in voorkomen betreffende den groei van dieren en planten, die voor ons doel van geen belang zijn), om daarna het resultaat mijner berekening te behandelen.

Koedoes 20 Februari 1880.

Geachte Professor!

Het spijt mij zeer, dat ik u zoo lang heb moeten laten wachten, eer dat ik aan uw verzoek kon voldoen, dewijl ik de zaak eerst nauwkeurig moest onderzoeken, door vragen en wedervragen aan enkele personen in de desa's in mijn regentschap en omstreken, die met de sterrebeelden bekend zijn, welke de inlanders als teekens gebruiken voor den landbouw; daar het zeer natuurlijk is, dat niet iedereen weet uit te leggen, hoe zij die teekens gebruiken in verband met de zonnetijds-rekening, ... , die enkele personen worden door de bevolking *doekoens* genoemd, hetgeen beteekent arts, vroedmeester enz., ook een geleerde, die tot vraagbaak van een ieder dient; zij wijzen den stand der sterrebeelden en andere teekens aan in verband met de mongso's; mijn onderzoek is niet alleen gelukt met de teekens der sterrebeelden, maar ook met andere teekens, die de landbouwer gewoon is te gebruiken om zijn akker te bebouwen, ... ,

NAMEN DER STERREBEELDEN EN ANDERE TEEKENS, WAAROP DE JAVAANSCHE LANDBOUWERS LETTEN BIJ HET PLANTEN VAN PADI EN TWEEDE GEWASSEN.

De Javaansche landbouwer let bij het planten van padi en tweede gewassen op twee voorname sterrebeelden, namelijk de lintang woeloeh, het sterrebeeld der 7 Plejjaden, en de lintang loekoe, het sterrebeeld der drie Koningen *), vereenigd met de onder beschreven 3 kleine en 2 groote sterren in zuid-oostelijke richting van de lintang woeloeh †). Bij de lintang loekoe zijn drie kleine sterren naast elkaar, die eene rigting van noord naar zuid hebben §) en nog twee

*) δ, ε en ζ Orionis.

†) Ik gis dat dit de Hyaden moeten zijn, hoewel die in het vervolg niet meer genoemd worden.

§) c, θ en ι Orionis.

groote sterren die zuid-oost en zuid-west van de genoemde kleine sterren staan *).

Bij eene goede beschouwing dier groep sterren ontwaart men hare gelijkenis met een ploeg, de 3 Koningen stelt de ploeg voor, de drie kleine sterren de boom van den ploeg, en in de twee groote ziet de Javaan de karbouwen.

Naar den stand dezer sterrebeelden wordt het zonnejaar verdeeld in 12 mångsås of tijdvakken, gedurende elk welker verschillende waarnemingen worden gedaan. De voornaamste hiervan zullen wij bespreken.

Mångså kasâ.

Dit is het eerste tijdperk van het zonnejaar, duurt 41 dagen, en wel ongeveer van 21 Junij tot en met 31 Julij.

De lintang loekoe en lintang woeloeh zijn 's morgens om $^1/_2$6 ure zichtbaar in het oosten op eene hoogte van 25^0 en 45^0 van den horizon.

De zon keert zuidelijk op en om 12 ure is de schaduw van een mensch 4 voet lang zuidwaarts.

De »Iwaks bettik", een kleine soort zoetwatervisch, krijgt een puntje op het hoofd.

Dit is de tijd om tweede gewassen te planten.

Mångså karâ.

Het 2^e tijdperk duurt 23 dagen, ongeveer van 1 tot en met 23 Augustus.

De lintang woeloeh staat aan het zenith en de lintang loekoe op ongeveer 70^0 aan den oostelijken hemel. De Iwaks bettik hebben twee putjes.

De zon gaat zuidelijk op, de schaduw is om 12 ure 2 voet zuidwaarts.

Mångså kĕtigâ.

Dit is het derde tijdperk, duurt ongeveer van 24 Augustus tot en met 17 September, dus 24 dagen.

De lintang woeloeh staat voor zonsopgang ongeveer op

---

*) α en β Orionis (Rigel).

70⁰ aan den westelijken hemel en de lintang loekoe aan het zenith.

De bladeren der vruchtboomen beginnen af te vallen.

De Iwaks bettik hebben 3 putjes.

De zon staat noordwaarts, om 12 ure is de schaduw een voet zuidwaarts.

De tweede gewassen beginnen vruchten te dragen.

Mângsâ kapat.

Dit tijdperk is het vierde, duurt 25 dagen, ongeveer van 17 September tot en met 11 October.

De lintang woeloeh staat vóór zonsopgang op ongeveer 50⁰ en de lintang loekoe op 70⁰ aan den westelijken hemel.

De glattiks, rijstvogels, komen bij zwermen op de oro-oro om hun voedsel te zoeken.

De vruchtboomen krijgen nieuwe loten en jonge bladeren.

De randoevruchten worden rijp, de kapok zichtbaar en begint langzamerhand af te vallen.

De zon komt precies in het oosten op, en is dus 's middags de schaduw loodregt.

In dit tijdperk worden de meeste tweede gewassen geoogst.

Mângsâ kĕlimâ.

Dit is het vijfde tijdperk van het zonnejaar, en duurt 27 dagen, ongeveer van 12 October tot en met 7 November.

De landbouwer observeert op den avond van zondag kliwon (bij de Javanen is dit reeds maandag legi, daar de dag begint met zonsondergang; derhalve wordt die avond malem sĕnēn legi genoemd) ongeveer $^1/_2$7 aan het noordoosten van den hemel een der lintang woeloeh, den volgenden malem sĕnēn een tweede; zoo ziet hij er elken volgenden malem sĕnēn een ster bij komen, totdat eindelijk de zesde weder op malem sĕnēn lĕgi zichtbaar is, dit tijdperk wordt selappan genoemd, dat is 35 dagen, het is de kring van eene week van 7 dagen en de pasar week van 5 dagen, op dien tweeden malem sĕnēn legi ziet hij 6 der sterren bij elkaâr, niet duidelijk, maar even als of zij achter een nevel staan, en laag aan den horizon.

In dien tijd valt de »boen oepas", vergiftige dauw, die zeer nadeelig werkt op den aanplant van tweede gewassen, ja zelfs volgens het beweren der landbouwers vernielt die dauw het tweede gewas, omdat de 6e ster slechts flaauw zichtbaar is.

De lempoejang, eene soort van boschplant, met gele wortels, die de Javanen voor medicijn gebruiken en bij de rijst eten, indien ze nog jong zijn, begint nieuwe wortels (boeng) uit te schieten.

De maoeq terik, eene soort van zeemeeuwen, komen op de velden, tegallans en oro-oro aan den voet van het gebergte, om larons of vliegende mieren te zoeken, die tegen dien tijd uitkomen. Door die vogels komen de paddestoelen of djamoer terik, die ontspruiten uit het vuil der vogels en door de inlanders bij de rijst worden gegeten.

De tjekithoets of tjilpvogels, die in andere tijden van het jaar, nooit 's morgens om 5 ure zingen, laten zich in die dagen op genoemd uur hooren; op gewone tijden zingen zij »tjekithoet tjekithoet", doch in die dagen hoort men 's morgens »tjekithoet thèng thèng".

De Iwaks bettik hebben vijf putjes op het hoofd.

De zon begint zuidwaarts te gaan, en om 12 ure 's middags is de schaduw van een mensch één voet lang noordwaarts.

In dien tijd worden de meeste tweede gewassen geoogst en begint men djagoeng te planten, terwijl de landbouwer zijne gereedschappen langzamerhand in orde maakt.

Mângsâ kanêm.

Dit is het 6e tijdperk van het zonnejaar, het duurt 43 dagen, van 8 November tot en met 20 December; het begint goed te regenen, de landbouwers maken een aanvang met de bewerking hunner sawahs en strooijen zaadpadi uit.

De zesde ster der lintang woeloeh werd op malem sênên legi flaauw zichtbaar en den volgenden maandag zag men dien duidelijk, allen waren duidelijk te observeren. De Javaansche landbouwer stelt zich te vreden met zes sterren van het beeld »de Pleijaden", aangezien de zevende niet met het bloote oog zichtbaar is.

Te gelijk met de ondergaande zon ziet men 's avonds de lintang loekoe boven den oostelijken horizon.

Die zelfde lintang loekoe wordt in dien tijd ook wel genoemd lintang djåkåtåwå, omdat door zijne verschijning de boen oepas verdwijnt.

De manoeqs blĕkék, snippen, die te voren niet te zien waren, komen te voorschijn, om op de waterplassen hun voedsel te zoeken.

De kowangans, een soort langwerpige torren, die voor het invallen der regens niet te zien waren, komen van boven wellicht van het gebergte, en leggen hunne eijeren in het gras, dat half onder water staat.

De kemlandingans, een soort van boomspinnekoppen, die vóór dien tijd hunne webben horizontaal maakten, beginnen die thans in verticale richting te spinnen.

De vruchten beginnen rijp te worden.

De Iwaks bettik krijgen zes putjes.

De zon gaat meer zuidwaarts, en om 12 ure 's middags heeft de schaduw eene lengte van 2 voet.

Mångså kepitoe.

Het zevende tijdperk van het zonnejaar, duurt 43 dagen, ongeveer van 21 December tot en met 2 Februarij.

In dien tijd eindigt het uitstrooijen van zaadpadi, en begint men de oudst gezaaide padi over te planten.

De lintang woeloeh staat op ongeveer 45°, en de lintang loekoe op 25° aan den oostelijken hemel.

De ouvi, een boschklimop, waarvan de knol kan gegeten worden, begint op te schieten, en de knol is rijp om gegeten te worden.

De eijeren der kowangans beginnen te breken, en de jongen, die de Javanen djoedèns noemen, komen te voorschijn.

De Iwak bettik hebben zeven putjes.

De vischen hebben nog geen machtige smaak, hunne koppen zijn nog week.

De jonge vischjes, bontangs genaamd, sterven in grooten getale.

De zon keert noordelijk terug, en om 12 uur is de schaduw drie voet noordwaarts.

Mångså kĕwŏlloe.

Dit is het achtste tijdperk, loopt ongeveer van 3 tot en met 28 Februarij en duurt dus 26 dagen.

In dien tijd wordt de jonge padi druk overgeplant, — de planttijd loopt ten einde, zoo ook het uitzaaien van padi, die niet overgeplant wordt en sawoer tinggal heet. Een en ander omdat op het einde van dezen mångså de lintang woeloeh en lintang loekoe 's avonds $^1/_2$ 7 ure staan aan het zenith en ongeveer op 70°.

De Iwak bettik hebben acht putjes.

De djoedèns beginnen te vliegen; zij heeten dan lambangans.

De glagah begint te bloeijen.

De zon komt in het oosten op.

Mångså kĕsångå.

Dit tijdperk, hetwelk ongeveer van 1 tot en met 25 Maart, en dus 25 dagen duurt, is het negende.

De padiaanplant draagt aren, en wanneer daaronder veel ledige zijn, is het een teeken, dat ze te laat geplant hebben, — of de lintang loekoe was reeds aan het zenith, en dus de ploeg omgekeerd.

De lintang woeloeh staat op 70° aan den westelijken hemel en de lintang loekoe 's avonds $^1/_2$ 7 ure voorbij het zenith.

De Iwaks bettik hebben negen putjes.

De bloesem der glagah begint af te vallen.

De zon gaat over den evenaar.

Mångså sĕpoeloeh.

Dit is het tiende tijdperk van het zonnejaar, duurt 24 dagen, ongeveer van 25 Maart tot en met 17 April.

De padi komt tot rijpheid en de oogst neemt een aanvang.

De lintang woeloeh en lintang loekoe staan op ongeveer 45° en 65° van den westelijken hemel,

De Iwaks bettik hebben geen putjes meer.

De zon gaat noordelijker op en om 12 ure is de schaduw van 1—2 voet zuidwaarts.

Mângså dêsthâ.

Dit is het elfde tijdperk, duurt 23 dagen, en wel ongeveer van 18 April tot en met 10 Mei.

De padioogst wordt algemeen. Het is het begin der korte dagen en koude nachten.

De lintang woeloeh is niet meer zichtbaar, en begint even als in de mângså kêlimâ weder tegen $^1/_2$ 6 ure 's ochtends in het oosten op te komen.

De lintang loekoe is 's avonds om $^1/_2$ 7 ure nog op 16° boven den westelijken horizon zichtbaar.

De randoeboomen beginnen te bloeijen.

De zon gaat steeds noordelijker op, en om 12 ure is de schaduw 3 voet zuidwaarts.

Mângså Sâdâ.

Dit is het twaalfde tijdperk van het zonnejaar, het duurt 41 dagen, ongeveer van 11 Mei tot en met 20 Junij.

Tegen het einde van dien mângså is de padioogst op de vlakte zoo goed als afgeloopen.

Men maakt de padi schoon, ze wordt gebost en in de schuren geborgen.

Men beijvert zich om de langdurende tweede gewassen, als indigo, katoen en djarak te planten.

Ook wordt de kort staande kedelé gezaaid, en wel tusschen de padi stronken in, zonder vooraf den grond te bewerken, terwijl hierna de grond wordt gereed gemaakt voor de teelt van djagoeng.

De lintang woeloeh is 's ochtends om $^1/_2$ 6 ure in zijn geheel zichtbaar, 10° boven den horizon, kort daarna komt ook de lintang loekoe te voorschijn achter de lintang woeloeh, doch de ploeg staat geheel onderste boven.

De zon komt eindelijk op den noordelijken keerkring en de schaduw van een mensch is 3 voet zuidwaarts.

TJONDRO NEGORO.

Koedoes 2 Februari 1880.

Ik heb nu deze opgaven, voor zoover zij op sterrebeelden betrekking hebben, aan de berekening getoetst, en zal de resultaten dezer vergelijking hieronder mededeelen. Ik berekende dus, zoowel voor ε Orionis als voor Alcyone, de uurhoeken, overeenkomende, voor eene zuiderbreedte van 7°, met de opgegevene zenithsafstanden, en vond het volgende:

ε Orionis.		Alcyone.	
Zenithsafstand.	Uurhoek.	Zenithsafstand.	Uurhoek.
20°	19°18′ = 1u17m	40°	26°14′ = 1u45m
25	24 28 = 1 38	45	33 40 = 2 15
65	65 0 = 4 20	80	75 48 = 5 3
74	74 4 = 4 56	85	81 22 = 5 25 ,5

Het resultaat mijner vergelijking is nu in de volgende tabel begrepen. — Vooraf echter nog eene opmerking betreffende de Pleiaden. Daar Alcyone 23°44′ noorderdeclinatie heeft, culmineert deze ster op 30°44′ afstand van het Zenith eener plaats die 7° zuiderbreedte heeft. Toch wordt er bij de tweede mongso gezegd: de lintang woeloeh staat aan het Zenith, en bij de derde mongso, dat zij voor zonsopgang ongeveer op 70° aan den westelijken hemel staat, terwijl zij niet eens de hoogte van 60° bereikt. Hieruit volgt dus wel, dat die hoogten niet in den gewonen zin moeten aangenomen worden, maar alleen verklaard moeten worden, als bogen gemeten langs de parallel der ster zóó, dat in den horizon de hoogte = 0, in den meridiaan = 90° gerekend wordt. Nu is de halve dagboog voor Alcyone voor eene plaats op 7° zuiderbreedte = 86°54′ of nagenoeg 87°; om dus de opgegevene hoogten in uurhoek te herleiden zal het best zijn, ze met $^1/_{30}$ te verminderen en van de rest het complement te nemen.

Op die wijze verkreeg ik nu de volgende vergelijking:

Mongso.	Aantal dagen.	Grenzen.	Midden.	Hoogte.		Middag-schaduw.	Berekening volgens Loekoe.	Berekening volgens Woeloeh.	Verschil met de opgave, (midden der mongso) Loekoe.	Verschil met de opgave, (midden der mongso) Woeloeh.
				te half zes des 's morgens.						
				Loekoe.	Woeloeh.					
I. Kåså. . . .	41	21 Juni — 31 Juli	11 Juli	25⁰ O.	45⁰ O.	4 voet Z.	17 Juli	9 Juli	+ 6d	— 2d
II. Karå'. . .	23	1 Aug. — 23 Aug.	12 Aug.	70	90	2 » »	1 Sept.	24 Aug.	+ 20	+ 12
III. Katigå. .	24	24 Aug. — 16 Sept.	5 Sept.	90	70 W.	1 » »	21 Sept.	13 Sept.	+ 16	+ 8
IV. Kapat . .	25	17 Sept. — 11 Oct.	29 Sept.	70 W.	50 W.	Loodrecht	10 Oct.	3 Oct.	+ 11	+ 4
V. Kalimå. .	27	12 Oct. — 7 Nov.	25 Oct.			1 voet N.	18 Nov.?			
VI. Kanem. .	43	8 Nov. — 20 Dec.	29 Nov.			2 » »				
				te half zeven des 's avonds.						
VII. Kapitoe.	43	21 Dec. — 2 Febr.	11 Jan.	25⁰ O.	45⁰ O.	3 » »	31 Dec.	24 Dec.	— 11	— 18
VIII. Kawåloe	26	3 Febr. — 28 Febr.	16 Feb.	70⁰ O.	90⁰		15 Feb.	7 Feb.	— 1	— 9
IX. Kasångå.	25	1 Mrt. — 25 Mrt.	13 Mrt.	voorbij het zenith.	70 W.		9 Mrt.	27 Feb.	— 4	— 14
X. Sadåså . .	24	25 Mrt. — 17 Apr.	6 April	65⁰ W.	45 W.	1–1½ v. Z.	1 Apr.	25 Mrt.	— 5	— 12
XI. Desthå. .	23	18 Apr. — 10 Mei	29 Apr.	16 W.	Begint weêr tegen half zes in het oosten op te komen.	3 voet Z.	21 Mei	30 Mei	+ 22	+ 31
				te half zes des 's morgens.						
XII. Sådå. . . .	41	21 Mei — 20 Juni	31 Mei		10⁰ O.	3 » »	8 Juni	4 Juni	+ 8	+ 4

Voor de 5e en 6e mongso wordt in plaats van hoogten de zichtbaarheid des avonds te half zeven opgegeven, en wel:

	Zondag	legi,	een	der	Pleiaden.		
2e	»	avond,	de 2e	»	»		
3e	»	» ,	» 3e	»	»		Selapan,
4e	»	» ,	» 4e	»	»		35 dagen.
5e	»	» ,	» 5e	»	»		
6e	»	legi ,	» 6e	»	»		

Op dezen avond alle zes zichtbaar, niet duidelijk, laag aan den horizon.

Zondag avond legi 6e Pleiade flauw zichtbaar.
volgende » » » » duidelijk »

Van de 20 verschillen, in de twee laatste kolommen der bovenstaande tabel opgegeven, zijn er zes, die grooter zijn dan de halve duur der mongso, waartoe zij behooren, zoodat de opgegevene hoogte eigenlijk op een dag zou passen, die geheel en al buiten de mongso ligt.

Zonderling zijn de opgaven betreffende de 5e mongso. De beteekenis van zondag kliwon, maandag legi, is deze, dat de Javanen gewoon zijn te gelijker tijd bij eene week van zeven en bij eene week van vijf dagen te tellen; de namen der dagen der vijfdaagsche week zijn pahing, pon, wagè, kliwon, legi. Malem sĕnèn beteekent woordelijk maandag avond, maar komt overeen met hetgeen de Europeaan noemt zondag avond, daar bij de Javanen de dag met zonsondergang begint. Malem sĕnèn legi is dus de avond vóór een maandag, die te gelijk in de vijfdaagsche week legi is, een volgende maandag is dus twee dagen verder in de vijfdaagsche week, en het duurt vijf weken, d. i. 35 dagen, eer er weder een maandag legi is. Nu bevat de geheele 5e mongso slechts 27 dagen, het zou dus wel kunnen gebeuren dat er in de geheele mongso niet eens een maandag legi was. En zoo er al een is, dan zou die in het eene jaar op den eersten dag der mongso, in het andere jaar op den laatsten dag

kunnen vallen; het spreekt echter van zelf, dat noch zevendaagsche, noch vijfdaagsche weekdag in eenige betrekking tot de hoogte der sterren op een bepaald uur van den dag staan, en dat deze alleen met den dag van het tropische (of eigenlijk van het siderale) jaar in verband staat.

Letten wij niet op die bijvoeging van weekdagen, dan merken wij op, dat telkens na 7 dagen op hetzelfde avonduur de Pleiaden 7 graden hooger staan; uit de opgaaf zou men dus tot deze gevolgtrekking komen, dát als bijv.: Alcyone, de helderste der Pleiaden, een half uur na zonsondergang zichtbaar wordt op 10° hoogte, de 2e in helderheid der Pleiaden zichtbaar wordt, op hetzelfde uur, dus bij even sterke schemering

	op	17	graden hoogte
de 3e	»	24	» »
de 4e	»	31	» »
de 5e	»	38	» »
de 6e	»	45	» »

Het is de vraag of dit werkelijk zoo is. Er is hier geene sprake van heliaschen ondergang, maar van acronychische opkomst, de sterregroep staat dus in het oosten, terwijl de schemering in het westen is, onder die omstandigheden is het verschil in helderheid der lucht bij 17 en bij 45 graden niet zoo groot, dat het opgegevene verschil waarschijnlijkheid bezit. Het is dus te vermoeden, dat de berichtgever van den Regent hier òf zich door plantasie heeft laten meêslepen, of een volkspraatje heeft medegedeeld.

Mijns inziens is het besluit, dat uit deze opgave te trekken is, dit, dat de sterrenmethode, om het landbouwbedrijf naar te regelen, wanneer die met zulke onvolkomene hulpmiddelen wordt aangewend, als bij de Javanen het geval schijnt te zijn, niet zeer nauwkeurig is, en zeer te recht door den kalender vervangen is.

Ik moet hier nog opmerken dat, hoewel de regent van Koedoes deze berichten van eenen doekon in zijn regentschap ontvangen heeft, het niet zeker is, dat in andere residenties dan Japara dezelfde sterregroepen geraadpleegd

worden; daaromtrent bezit ik nog geene gegevens; mochten die mij later geworden, zal ik er, als zij de moeite waard zijn, wellicht later nog iets van mededeelen.

Aanmerking. Het is zeker aan de gemakkelijkheid toe te schrijven, waarmede de Pleiaden te herkennen zijn, dat dezelfde sterregroep door zooveel verschillende volken voor het besprokene doel zijn aangewend geworden, immers reeds HESIODUS zegt in zijne: *Ἔργα καὶ ἡμέραι*, vs. 383.

Πληιάδων Ἀτλαγενέων ἐπιτελλομενάων,
Ἄρχεσθ' ἀμητοῦ ἀρότοιο δὲ δυσομενάων·

hetgeen door D. J. VAN LENNEP aldus vertaald wordt:

Als het zevental Pleiaden opwaarts klimt aan 's hemels baan,
Denk in tijds dan om Uw sikkel; om uw ploeg als ze ondergaan.

De lengte der Pleiaden bedraagt thans 58°; ten tijde van HESIODUS bedroeg zij ongeveer 36° minder dan thans, en dus ongeveer 22°. HESIODIUS zelf zegt, dat de Pleiaden 40 dagen onzichtbaar blijven, hij vervolgt namelijk:

Αἱ δ' ἤτοι νύκτας τε καὶ ἤματα τεσσαράκοντα
κεκρύφαται;

bij het onzichtbaar worden na zonsondergang, (heliaschen ondergang), had de zon dus eene lengte van 2°, bij het zichtbaar worden vóór zonsopkomst (heliasche opkomst) van 42°, maar bij het regelen van het landbouwbedrijf werd ook gelet op het ondergaan vóór zonsopkomst, en het opkomen na zonsondergang.

GEMINUS noemt deze vier verschijnselen:

		Dagen, waarop dit verschijnsel voor de Pleiaden plaats greep.
heliasche ondergang	*κρύψις ἑσπερία*,	22 Maart
heliasche opkomst	*ἐπιτολὴ ἑωθινή*,	2 Mei
opkomen na zonsondergang	*ἐπιτολὴ ἑσπερία*,	4 Nov.
ondergaan voor zonsopkomst	*κρύψις ἑωθινή*,	25 Sept.

HESIODUS bedoelt nu met *Πληιάδων ἐπιτελλομενάων* blijkbaar de *ἐπιτολὴ ἑωθινὴ*, en met *δυσομενάων* eveneens de *κρύψις ἑωθινὴ*. Behalve dat koren niet in 40 dagen (van 22 Maart tot 2 Mei) van zaaien tot rijpen komen kan, blijkt het ook daaruit, dat in vers 615, nadat de wijnoogst besproken is, andermaal gezegd wordt:

. . . . . *Αὐτὰρ ἐπὴν δὴ*
Πληϊάδες θ' Ὑάδες τε τό τε σθένος Ὠρίωνος
δύνωσιν, τότ' ἔπειτ' ἀρότου μεμνημένος εἶναι
(ὡραίου) . , ...

Van LENNEP verhaalt ook terecht:

Zij u voorts nog dit, mijn broeder! in 't opmerkzaam brein gegrift,
Dat gij als de regenstarren weêr aan 's hemels breede baan,
Met Orion en Pleiaden, *'s morgens* aan de kim vergaan,
Dat gij dan uw ploeggereedschap met der haast weêr voert in 't licht.

Dr. A. STEITZ (*Die Werke und Tage des Hesiodus, nach ihrer Composition geprüft und erklärt*, Leipzig 1869, p. 119) legt het ook zoo uit, en noemt ook Mitte Mai en Anfang November; in plaats van Mitte Mai had hij wellicht beter Anfang Mai kunnen zeggen, althans als het gezegde van HESODIUS waar is, dat de Pleiaden veertig dagen onzichtbaar blijven.

Utrecht, 10 Augustus 1880.

SUR UN THÉORÈME D'ABEL ET SUR LES FORMULES GONIOMÉTRIQUES QUI S'EN DÉDUISENT,

PAR

G. F. W. BAEHR.

Si l'on pose

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = F(x),$$

où

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

on aura d'après un théorème d'Abel (*Oeuvres complètes, tome I, pag.* 355)

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_\mu) = C, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, dont les carrès $x_1^2, x_2^2 \ldots x_\mu^2$ satisfont à l'équation entière paire, de dégre 2μ,

$$f(x)^2 - \varphi(x)^2 (\Delta x)^2 = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

où, les polynômes entiers $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont quelconques, mais l'un des deux pair l'autre impair, et leurs coefficients supposés variables; C étant une constante, qui ne dépend pas des valeurs arbitraires attribuées à ces coefficients.

Si, en prenant tous ces coefficients égaux à zéro, l'équation (2) prend la forme

$$x^{2\mu} = 0,$$

c'est-à-dire, que toutes ses racines soient nulles, chacun des termes du premier membre de (1) devient zéro, et par suite la constante C sera alors nulle.

Abel a fait voir que l'on peut choisir les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$ et déterminer leurs coefficients tellement, que $\mu-1$ quantités arbitraires x_1, $x_2 \ldots x_{\mu-1}$ soient racines de l'équation (2), laquelle donnera alors la racine x_μ en fonction algébrique des ces quantités arbitraires.

D'après la notation de Jacobi, posant $F(x) = u$, on a $x = sinam\, u$, la formule (1) devient

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{\mu-1} + u_\mu = 0,$$

et l'équation (2) donnera donc $sinam\, u_\mu$, ou $\pm sinam\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{\mu-1})$, en fonction algébrique de $sinam\, u_1$, $sinam\, u_2 \ldots$ etc.

Si le nombre μ est pair, ou $\mu = 2n$, il faudra poser

$$f(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n},$$

$$\varphi(x) = x(b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_{n-2} x^{2n-4}),$$

qui contiennent $2n-1$ coefficients indéterminés, tandis que les quantités arbitraires x_1, $x_2 \ldots x_{2n-1}$ devront satisfaire à

$$a_0 + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n} + (b_0 x + b_1 x^3 + \ldots + b_{n-2} x^{2n-3}) \Delta x = 0,$$

un des deux facteurs dans lesquels on peut décomposer l'équation (2).

On aura donc, entre les inconnues a_0, $a_1, \ldots a_{n-1}$, b_0, $b_1 \ldots b_{n-2}$ les $2n-1$ équations linéaires, que nous pouvons indiquer par

$$a_0 + a_1 x^2 \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + b_0 x \Delta x + b_1 x \Delta x \ldots + b_{n-2} x^{2n-3} \Delta x = -x^{2n} \left| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{matrix} \right. ,$$

le signe à la droite du second membre indiquant que l'on considère le groupe de $2n-1$ équations obtenues en donnant à x successivement les indices $1, 2, \ldots, 2n-1$.

Il suffira d'en résoudre a_0, parce que l'équation (2) ordonnée a pour dernier terme a_0^2, et donne ainsi pour le produit des racines

$$x_0^2 \cdot x_1^2 \ldots x_{2n-1}^2 x_{2n}^2 = a_0^2,$$

d'où

$$x_{2n} = \pm \frac{a_0}{x_0 \cdot x_1 \ldots x_{2n-1}}.$$

Employant pour les déterminants une notation analogue à celle par laquelle on a représenté le groupe des $2n-1$ équations, on tire de celles-ci

$$a_0 = -\frac{\begin{vmatrix} x^{2n} \cdot x^2 \cdot x^4 \ldots x^{2n-2} \cdot x\,\Delta x \cdot x^3\,\Delta x \ldots x^{2n-3}\,\Delta x \end{vmatrix}^{x_1}_{x_{2n-1}}}{\begin{vmatrix} 1 \cdot x^2 \cdot x^4 \ldots x^{2n-2} \cdot x\,\Delta x \cdot x^3\,\Delta x \ldots x^{2n-3}\,\Delta x \end{vmatrix}^{x_1}_{x_{2n-1}}},$$

donc, divisant les lignes successives du déterminant au numérateur par $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$, on obtient

$$x_{2n} = \pm \frac{\begin{vmatrix} x^{2n-1} \cdot x \cdot x^3 \ldots x^{2n-3} \cdot \Delta x \cdot x^2\,\Delta x \ldots x^{2n-4}\Delta x \end{vmatrix}^{x_1}_{x_{2n-1}}}{\begin{vmatrix} 1 \cdot x^2 \cdot x^4 \ldots x^{2n-2} \cdot x\,\Delta x \cdot x^3\,\Delta x \ldots x^{2n-3}\Delta x \end{vmatrix}^{x_1}_{x_{2n-1}}};$$

pour déterminer le signe, on fera $n = 2$ et $x_3 = 0$, ce qui donne

$$x_4 = \pm \begin{vmatrix} x_1^3 \cdot x_1 \cdot \Delta x_1 \\ x_2^3 \cdot x_2 \cdot \Delta x_2 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 \cdot x_1^2 \cdot x_1\,\Delta x_1 \\ 1 \cdot x_2^2 \cdot x_2\,\Delta x_2 \\ 1 \quad 0 \quad 0 \end{vmatrix},$$

ou en développant,

$$x_4 = \pm (x_1^3 x_2 - x_2^3 x_1) : (x_1^2 x_2\,\Delta x_2 - x_2^2 x_1\,\Delta x_1)$$

et, divisant les deux termes du quotient par $x_1 x_2$,

$$x_4 = \pm \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1},$$

en sorte que par la formule connue pour $sin\, am\,(u_1 + u_2)$ on conclut qu'il faut prendre le signe $+$.

Ainsi, transposant la colonne x_{2n-1} | entre les colonnes x_{2n-3} | et Δx | , c'est à dire, la faisant avancer de $n-1$ places vers la droite, l'on aura

$$x_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{\left| x.x^3 \ldots x^{2n-3}.x^{2n-1}.\Delta x.x^3\Delta x \ldots x^{2n-4}\Delta x \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{matrix} \right|}{\left| 1.x^2 \ldots x^{2n-4}.x^{2n-2}.x\Delta x.x^3\Delta x \ldots x^{2n-3}\Delta x \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{matrix} \right|} \quad \ldots(3)$$

Si le nombre μ est impair, ou $\mu = 2n+1$, il faudra poser

$$f(x) = x\,(a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n})$$

$$\varphi(x) = \quad b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_{n-1} x^{2n-2},$$

et les $2n$ quantités arbitraires x_1, $x_2 \ldots x_{2n}$ devront satisfaire à l'équation

$$a_0 x + a_1 x^3 \ldots + a_{n-1} x^{2n-1} + x^{2n+1} + (b_0 + b_1 x^2 \ldots + b_{n-1} x^{2n-2})\,\Delta x = 0,$$

en sorte que l'on aura entre les inconnues $a_0 \ldots a_{n-1}$, $b_0 \ldots b_{n-1}$ les $2n$ équations

$$a_0 x + a_1 x^3 \ldots + a_{n-1} x^{2n-1} + b_0 \Delta x + b_1 x^2 \Delta x \ldots + b_{n-1} x^{2n-2} \Delta x = -x^{2n+1} \left| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix} \right.$$

d'où il faudra résoudre b_0, ce qui donne

$$b_0 = - \frac{\left| x.x^3 \ldots x^{2n-1}.x^{2n+1}.x^2\Delta x.x^4\Delta x \ldots x^{2n-2}\Delta x \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix} \right|}{\left| x.x^3 \ldots x^{2n-1}.\Delta x.x^2\Delta x.x^4\Delta x \ldots x^{2n-2}\Delta x \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix} \right|},$$

et, parce que l'équation (2) donne pour le produit des racines

$$x_1^2 . x_2^2 \ldots x_{2n}^2 x_{2n+1}^2 = b_0^2,$$

on aura

$$x_{2n+1} = -\frac{\left| 1 . x^2 \ldots x^{2n-2} . x^{2n} . x\Delta x . x^3\Delta x \ldots x^{2n-3}\Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}}{\left| x . x^3 \ldots x^{2n-1} . \Delta x . x^2\Delta x . x^4\Delta x \ldots x^{2n-2}\Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}}, \ldots (4)$$

ayant égard que pour $n = 1$ on aurait

$$x_3 = \pm \left| \begin{matrix} 1 . x_1^2 \\ 1 . x_2^2 \end{matrix} \right| : \left| \begin{matrix} x_1 . \Delta x_1 \\ x_2 . \Delta x_2 \end{matrix} \right|$$

ou

$$x_3 = \pm \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1},$$

où il faut prendre le signe $-$.

Si l'on fait $x_{2n} = 0$ dans (4), tous les éléments de la $2n^{\text{ième}}$ ligne du déterminant au numérateur sont égaux à zéro, excepté le premier qui reste 1, et ce déterminant se réduit alors à

$$-\left| x^2 \ldots x^{2n-2} . x^{2n} . x\Delta x . x^3\Delta x \ldots x^{2n-3}\Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{matrix};$$

pour le déterminant au dénominateur on peut écrire d'abord

$$(-1)^n \left| \Delta x . x . x^3 \ldots x^{2n-1} . x^2\Delta x . x^4\Delta x \ldots x^{2n-2}\Delta x \right| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{matrix}$$

parce qu'on a fait reculer de n places vers la gauche la colonne Δx | ; faisant $x_{2n} = 0$, tous les éléments de la

$2n^{\text{ième}}$ ligne sont zéro, excepté le premier, qui devient 1; ce déterminant se réduit donc à

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x\,.\,x^3\ldots x^{2n-1}\,.\,x^2\,\Delta x\,.\,x^4\,\Delta x\ldots x^{2n-2}\,\Delta x \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{vmatrix};$$

chacun des déterminants réduits est divisible par le produit $x_1\,.\,x_2\ldots x_{2n-1}$, et remarquant que pour $x_{2n}=0$ la formule (4) doit donner pour x_{2n+1} la même valeur que la formule (3) donne pour x_{2n}, on voit que les deux formules s'accordent.

Si maintenant, pour passer des fonctions elliptiques aux fonctions goniométriques, on fait $k=0$, ou aura

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = u = arc.\,sin\,x,$$

donc

$$x = sin\,u, \qquad \Delta x = cos\,u,$$

et les formules (3) et (4) donnent, écrivant a aulieu de u,

$$sin\,(a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1}) = (-)^{n-1}\times$$

$$\frac{\begin{vmatrix} sin\,a\,.\,sin^3a\ldots sin^{2n-1}a\,.\,cos\,a\,.\,sin^2a\,cos\,a\ldots sin^{2n-4}a\,cos\,a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1\,.\,sin^2a\ldots sin^{2n-2}a\,.\,sin\,a\,cos\,a\,.\,sin^3a\,cos\,a\ldots sin^{2n-3}a\,cos\,a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{vmatrix}}, \ldots (5)$$

$$sin\,(a_1+a_2+\ldots+a_{2n}) = -$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 1\,.\,sin^2a\ldots sin^{2n-2}a\,.\,sin^{2n}a\,.\,sin\,a\,cos\,a\ldots sin^{2n-3}a\,cos\,a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sin\,a\,.\,sin^3a\ldots sin^{2n-1}a\,.\,cos\,a\,.\,sin^2a\,cos\,a\ldots sin^{2n-2}a\,cos\,a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{vmatrix}} \ldots (6)$$

Si l'on change a en $\frac{1}{2}\pi - a$, le premier membre de (5) devient

$$sin\left[\tfrac{2n-1}{2}\pi-(a_1+a_2\ldots+a_{2n-1})\right] = sin\,\tfrac{2n-1}{2}\,\pi\,cos\,(a_1+a_2\ldots+a_{2n-1})$$
$$= (-1)^{n-1}\,cos\,(a_1+a_2\ldots+a_{2n-1}),$$

et cette formule se change alors en

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}) =$$

$$+ \frac{\left|\begin{array}{l} \cos a . \cos^3 a \ldots \cos^{2n-1} a . \sin a . \cos^2 a \sin a \ldots \cos^{2n-4} a \sin a \end{array}\right| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{array}}{\left|\begin{array}{l} 1 . \cos^2 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos a \sin a . \cos^3 \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \end{array}\right| \begin{array}{l} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{array}};$$

quand dans le déterminant au dénominateur on change la colonne $\cos^2 a \mid$ en $1 - \sin^2 a \mid$, ce déterminant devient la différence des deux déterminants

$$\mid 1 . 1 . \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \mid$$

et

$$\mid 1 . - \sin^2 a . \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \mid ,$$

dont le premier, ayant deux colonnes égales, est identiquement nul; donc le dénominateur peut être réduit d'abord au déterminant

$$- \mid 1 . \sin^2 a . \cos^4 a \ldots \cos^{2n-2} a . \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \mid ;$$

ensuite, si dans celui-ci on change la colonne $\cos^4 a \mid$ en $(1 - \sin^2 a)^2 \mid$, ou $1 - 2 \sin^2 a + \sin^4 a \mid$, on voit qu'il peut être partagé en trois déterminants, dont les deux premiers sont identiquement zéro, et continuant ainsi à introduire le sinus au lieu du cosinus, il sera réduit à

$$\pm \mid 1 . \sin^2 a . \sin^4 a \ldots \sin^{2n-2} a . \cos a \sin a . \cos^3 a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \mid ;$$

si dans celui-ci on écrit successivement

$$\cos a \sin a (1 - \sin^2 a), \quad \cos a \sin a (1 - \sin^2 a)^2, \ \ldots \text{ etc.}$$

au lieu de

$$\cos^3 a \sin a, \quad \cos^5 a \sin a, \ \ldots \text{ etc.}$$

il sera enfin réduit à

$$\pm\,|\,1.\sin^2 a.\sin^4 a\ldots\sin^{2n-2}a\,.\,\sin a\cos a.\sin^3 a\cos a\ldots\sin^{2n-3}a\cos a\,|$$

qui est, au signe près, le même que le dénominateur de (5).

Pour déterminer ce signe, comparons deux à deux les colonnes du déterminant primitif; on voit que s'il change de signe en réduisant certaine colonne $\cos^{2p} a\,|$ il en change aussi par la réduction de la colonne $\cos^{2p+1} a \sin a$; le signe définitif sera donc celui qui est introduit par la réduction de la colonne $\cos^{2n-2} a\,|$, avec laquelle ne correspond plus une colonne $\cos^{2n-1} a \sin a$, et comme le dernier terme du développement de $\cos^{2n-2} a = (1 - \sin^2 a)^{n-1}$ est $(-1)^{n-1}\sin^{2n-1} a$, on voit que ce signe sera $(-1)^{n-1}$.

De la même manière le numérateur peut être réduit à

$$\pm\,|\,\cos a\,.\,\cos a \sin^2 a\ldots\cos a\sin^{2n-2}a\,.\,\sin a\,.\,\sin^3 a\ldots\sin^{2n-3}a\,|\,;$$

les colonnes, qui pendant la réduction font changer le signe, étant comparées deux à deux, il reste celle désignée par $\cos^{2n-1} a\,|$, ce qui, comme dans le cas précédent, fait voir que le signe définitif sera $(-1)^{n-1}$. Ainsi, on aura d'abord

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}) =$$

$$\frac{\left|\begin{array}{l|l}\cos a\,.\,\cos a\sin^2 a\ldots\cos a\sin^{2n-2}a\,.\,\sin a\,.\,\sin^3 a\ldots\sin^{2n-3}a & \begin{matrix}a_1\\ \vdots\\ a_{2n-1}\end{matrix}\end{array}\right|}{\left|\begin{array}{l|l}1\,.\,\sin^2 a_1\ldots\sin^{2n-2}a\,.\,\sin a\cos a\,.\,\sin^3 a\cos a\ldots\sin^{2n-3}a\cos a & \begin{matrix}a_1\\ \vdots\\ a_{2n-1}\end{matrix}\end{array}\right|};$$

quand au numérateur on échange $(n-1)$ fois deux colonnes entre-elles, savoir les colonnes $\cos a\,|$ et $\sin a\,|$, $\cos a\sin^2 a\,|$ et $\sin^3 a\,|\ldots$, $\cos a\sin^{2n-4}a$ et $\sin^{2n-3}a$, le déterminant devient: $(-1)^{n-1}\times$

$$|\sin a\,.\,\sin^3 a\ldots\sin^{2n-3}a\,.\,\cos a\sin^{2n-2}a.\cos a.\sin^2 a\cos a\ldots\sin^{2n-4}a\cos a\,|,$$

enfin, si dans celui-ci on porte la colonne $\cos a\sin^{2n-2}a\,|$ à la dernière place, c'est-à-dire, si l'on fait avancer cette

colonne de $n-1$ places vers la droite, il doit être de nouveau multiplié par $(-1)^{n-1}$, et il obtiendra donc le signe $+$, en sorte que l'on aura

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-1}) = \frac{\left|\begin{matrix} \sin a.\sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a \,.\, \cos a \,.\, \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-2} a \cos a \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix}}{\left|\begin{matrix} 1.\sin^2 a \ldots \sin^{2n-4} a.\sin^{2n-2} a.\sin a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{matrix}} \ldots (7)$$

On ne peut de cette manière obtenir $\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n})$, le nombre des éléments étant pair. Si l'on change dans ce cas a en $\frac{1}{2}\pi - a$, le premier membre de (6) devient

$$\sin(n\pi - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})) = -\cos n\pi \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n})$$
$$= (-1)^{n-1} \sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n});$$

donc, en vertu de la formule (6), on aura aussi

$$\sin(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}) =$$

$$(-1)^n \frac{\left|\begin{matrix} 1.\cos^2 a \ldots \cos^{2n-2} a \,.\, \cos^{2n} a \,.\, \cos a \sin a \ldots \cos^{2n-3} a \sin a \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{matrix}}{\left|\begin{matrix} \cos a.\cos^3 a \ldots \cos^{2n-1} a.\sin a.\cos^2 a \sin a \ldots \cos^{2n-2} a \sin a \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{matrix}};$$

en effet, réduisant les déterminants comme dans les cas précédents, cette formule reprend sa forme primitive.

Mais en faisant dans la formule (7) $a_{2n-1} = 0$, tous les éléments de la $(2n-1)^{\text{ième}}$ ligne du déterminant au numérateur deviennent zéro, excepté celui de la $n^{\text{ième}}$ colonne, qui est $\cos a_{2n-1}$ et devient égal à l'unité; ce déterminant deviendra donc égal à celui que l'on obtient en effaçant cette ligne et cette colonne, multiplié par $(-1)^{2n-2} \times (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Au dénominateur tous les éléments de la dernière ligne deviennent zéro, excepté le premier; il sera donc égal au

déterminant obtenu en rayant cette ligne et cette colonne, et aura le même signe que le déterminant primitif. De plus, les deux déterminants réduits sont divisibles par le produit $\sin a_1 \sin a_2 \ldots \sin a_{2n-2}$, en sorte que l'on aura

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n-2}) = (-1)^{n-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & . \sin^2 a \ldots \sin^{2n-4} a . \sin a \cos a . \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-3} a \cos a \\ \sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-3} a . & \cos a & . \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-4} a \cos a \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \end{matrix}$$

ou, changeant n en $n + 1$,

$$\cos(a_1 + a_2 \ldots + a_{2n}) = (-1)^n \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & . \sin^2 a \ldots \sin^{2n-2} a . \sin a \cos a . \sin^3 a \cos a \ldots \sin^{2n-1} a \cos a \\ \sin a . \sin^3 a \ldots \sin^{2n-1} a . & \cos a & . \sin^2 a \cos a \ldots \sin^{2n-2} a \cos a \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{matrix} \quad \ldots(8).$$

Delft, Octobre 1880.

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING DES HEEREN Dr. R. HORST,

GETITELD:

OVER BEVRUCHTING EN ONTWIKKELING VAN HERMELLA ALVEOLATA M. E.

(Uitgebracht in de Verg. der Afd. Nat. van 30 October 1880.)

De ondergeteekenden, uitgenoodigd om der Afddeeling voor Wis- en Natuurkunde der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van advies te dienen ten opzichte van een opstel van den heer R. HORST, over bevruchting en ontwikkeling van *Hermella alveolata* M. EDW., hebben de eer hierover het volgende te berichten.

De in het Hollandsch geschreven verhandeling is 8 folio pagina's groot en gaat vergezeld van een elftal afbeeldingen; zij is gewijd, zooals het opschrift reeds aanduidt, aan de bevruchting en ontwikkeling van het ei van Hermella.

De schrijver behandelt eerst het bevruchtingsproces en deelt hierover het volgende mede:

Bij aanraking van spermatozoön en ei ontstaat er tusschen ei-inhoud en eivlies een ruimte, evenals dit waarschijnlijk bij alle bevruchte eieren het geval is. Tegenover de plaats, waar een spermatozoön bezig is met zijn kopje den dooierwand te doorboren, zag schrijver een protoplasma-uitlooper van den eidooier zich verheffen en het spermatozoön te gemoet gaan. Na het dooiervlies doorboord te hebben, dringt het spermatozoön in den protoplasma-uitlooper, die zich daarna weder terugtrekt.

Omtrent het verder lot der spermatozoa kan de schrijver niets mededeelen, uithoofde de ei-inhoud zoo donker en korrelig wordt, dat ten slotte ook van het kiemblaasje niets meer te zien is. Binnen een uur na het indringen der spermatozoa treden de richtingsblaasjes uit.

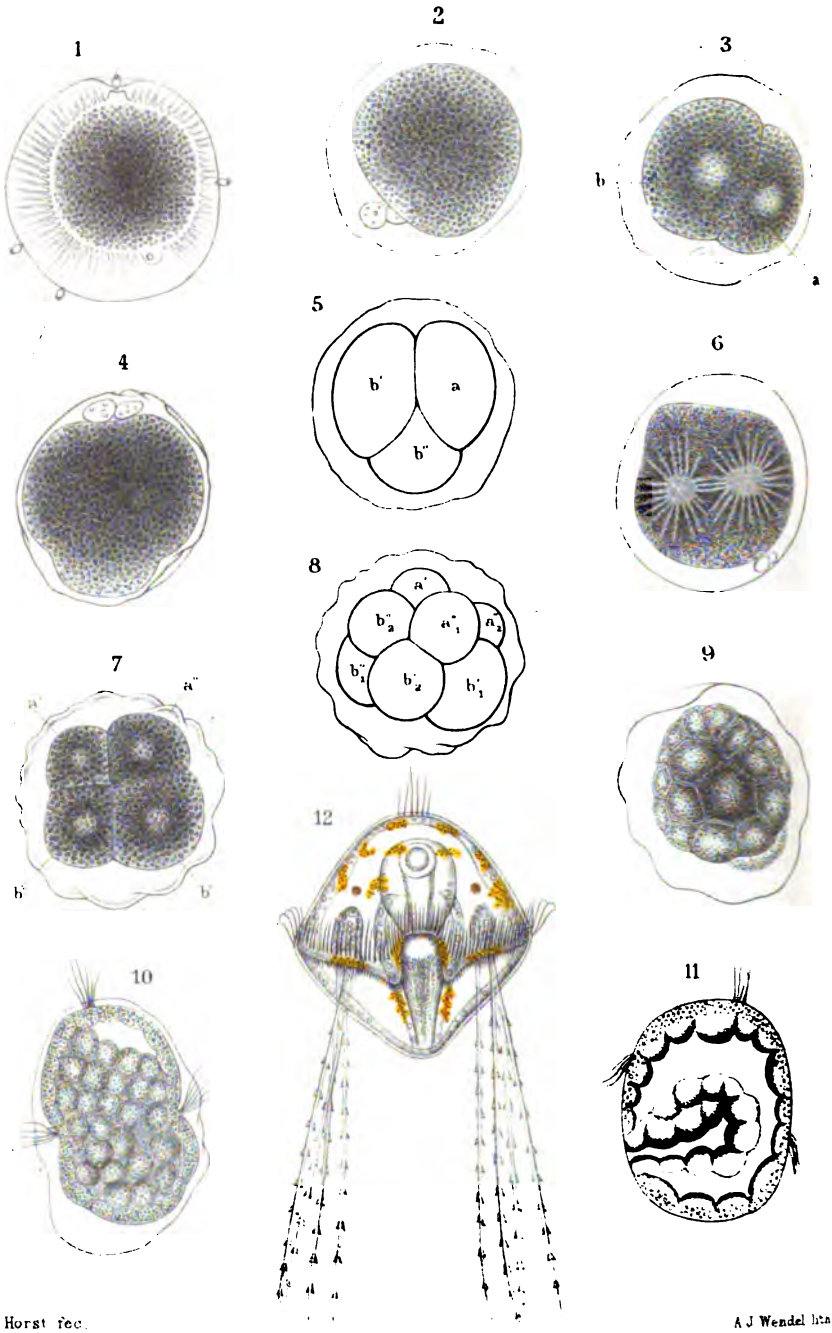
Het klievingsproces vertoont geheel het karakter der inaequale splijting. Ongeveer 12 uur na de bevruchting is het embryo in een mesotroche larve overgegaan. Later wordt de primordiale lichaamsholte zichtbaar en beginnen zich de eerste sporen van het darmkanaal te vertoonen. Oudere larven bieden geen onbeteekenende verschillen aan met die van andere Kokerwormen.

De mededeeling van den heer HORST bevat dus een niet onbelangrijke bijdrage tot de kennis van de ontogenie der Kokerwormen en Uwe commissie aarzelt dan ook niet voor de opneming daarvan in de Verslagen en Mededeelingen te adviseeren.

Leiden en *Utrecht*, October 1880.

C. K. HOFFMANN.
Th. W. ENGELMANN.

R. HORST, Bevr. en Ontw. v. Hermella alveolata.



R Horst fec.

A J Wendel lith.

OVER BEVRUCHTING EN ONTWIKKELING

VAN

HERMELLA ALVEOLATA MILN. EDW.

DOOR

Dr. R. HORST.

Onze kennis omtrent de eerste ontwikkelingstoestanden en larvenvormen der Polychaete Anneliden moet nog steeds vrij gebrekkig genoemd worden. Zij berust namelijk grootendeels op waarnemingen, gedaan aan broed dat uit zee gevischt werd, zonder dat het altijd mogelijk was de herkomst daarvan met zekerheid te bepalen; ook kon natuurlijk op deze wijze geene doorloopende reeks van op elkander volgende stadiën verkregen worden. Onder de eersten, die getracht hebben in deze leemte te voorzien en *ab ovo* de ontwikkeling eener Annelide te volgen, behoort QUATREFAGES, die in zijne »Mémoire sur l'Embryogénie des Annélides" *) de ontwikkeling der *Hermella alveolata* op uitvoerige wijze beschreven heeft. Twee jaren later heeft hij nogmaals zijne onderzoekingen over het bevruchtingsproces en de voorwaarden van ontwikkeling dezer Annelide in eene afzonderlijke verhandeling †) nedergelegd. Met het oog evenwel op het groot aantal jaren, dat verloopen is sedert deze waarnemingen gedaan werden, kwam mij een hernieuwd onderzoek niet ongewenscht voor. Daartoe werd ik dezen zomer in de gelegenheid gesteld, gedurende een kort verblijf in het Zoölogisch Station te Wi-

*) *Ann. des Scienc. Natur.* 3e Sér. Zoölogie, D. X, 1848, bl. 153.

†) *Ann. des Scienc. Natur.*, D. XIII, bl. 126.

mereux, waar Prof. GIARD met groote gastvrijheid eene plaats ter mijner beschikking stelde *).

De *Hermella alveolata* vormt hier op korten afstand in zee uitgestrekte banken, niet ongelijk aan koraalbanken, die bij lage ebbe gemakkelijk te bereiken zijn. Gelijk bekend is, zijn de geslachten gescheiden en in geslachtsrijpen toestand de wijfjes door haar roseachtige kleur gemakkelijk van de melkwitte mannetjes te onderkennen. Bovendien bieden zij het groote voordeel aan, dat zij den ganschen zomer ter voortplanting geschikt zijn. Om de kunstmatige bevruchting, die ook reeds door QUATREFAGES gedaan is, tot stand te brengen, is het niet noodig de dieren vooraf uit hun harde kokers te bevrijden; het is voldoende hen een weinig te verontrusten en weldra ziet men uit het eene uiteinde van den koker een stroom respectievelijk hetzij van eieren of van sperma te voorschijn komen.

De eieren hebben een diameter van ongeveer 0.08 m.m. met een groot kiemblaasje en duidelijke kiemvlek. De sterk korrelige dooier ligt aanvankelijk dicht tegen het dooiervlies aan, maar ter nauwernood zijn de spermatozoïden met het ei in aanraking gekomen, of de dooier trekt zich een weinig van den eiwand terug en tegelijk heeft er eene concentratie van de deutoplasmakorreltjes plaats, zoodat eene laag van helder doorschijnend korrelvrij protoplasma aan den omtrek zich ophoopt (couche enveloppante van FOL)†). Zeer waarschijnlijk berust de verwijdering tusschen den eiwand en den dooier niet alleen op zamentrekking van dezen laatsten, maar treedt ook water langs osmotischen weg door het dooiervlies naar binnen gelijk QUATREFAGES meent en door CALBERLA §) voor de eieren van *Petromyzon* aangetoond is; evenwel komt het mij dan eenigszins onverklaarbaar voor, dat het dooiervlies bij bijna alle bevruchte eieren terstond zóó

*) Ik maak van deze gelegenheid gebruik om mijne vakgenooten op dit gunstig gelegen en gemakkelijk te bereiken Kust-Laboratorium opmerkzaam te maken.

†) *Recherches sur la fécondation, etc.*

§) *Zeitschr. f. Wissensch.* Zoölogie D. XXX, bl. 437.

sterk geplooid is (fig. 7 en 8). Hoewel er op die wijze tusschen den dooier en het dooiervlies eene ruimte ontstaan is, zoo is het verband tusschen beiden toch niet geheel opgeheven, want van uit de korrelvrije randzone van den dooier gaan talrijke fijne, nauw zichtbare, uitloopers naar den eiwand, die als stralen den dooier omgeven (fig. 1); een volkomen gelijk verschijnsel is door CALBERLA tijdens de bevruchting aan het *Petromyzon*-ei waargenomen *). Ook SELENKA heeft bij *Tozopneustes variegatus* †) zulke uitloopers van de buitenste dooierlaag den geleimantel van het ei zien binnendringen; dit geschiedt evenwel tijdens de rijpwording van het ei, en de uitloopers verdwijnen langen tijd vóór de bevruchting, waarom hij hen dan ook met de voeding van het ei in verband brengt. Bij het *Hermella*-ei staan zij evenwel zonder twijfel met de bevruchting in betrekking. Is op een zeker punt eene spermatozoïde bezig met haar kopje den dooierwand te doorboren, dan ziet men hoe een dergelijke breede protoplasma-uitlooper, evenals de pseudopodie van een amoebe, de spermatozoïde te gemoet gaat en zoolang blijft bestaan tot deze laatste door het dooiervlies zich een weg gebaand heeft (fig. 1). Na verloop van ongeveer 20 minuten dringt de spermatozoïde het dooierverlengsel binnen en smelt daarmede zamen; de protoplasma-uitlooper wordt langzaam weder ingetrokken en zóó de spermatozoïde binnen de dooiermassa gevoerd §). De uitspraak van QUATREFAGES **) »Je crois inutile d'insister sur un point, savoir que jamais je n'ai vu un spermatozoïde pénétrer dans l'oeuf et s'y étaler", reeds door FOL gewraakt, mag dus beschouwd worden als op onvolledige waarneming te berusten. De lengte der protoplasma-uitloopers hangt eenigszins af van het snelle indringen der spermatozoïden, want, geschiedt dit spoedig, dan heeft de eiwand geene gelegenheid, zich ver van

*) loc. cit., bl. 458, pl. XXVII, fig. 7 en 8, pl. XXIX, fig. A en B.

†) Zoologische Studien, 1. Befruchtung des Eies von *Tozopneustes variegatus*, bl. 2, pl. 1, fig. 2 en 3.

§) Mijn vriend Dr. R. MONIEZ had de goedheid zich mede van de juistheid dezer waarneming te overtuigen.

**) loc. cit., bl. 128.

den dooier te verwijderen. Niet in alle uitloopers dringt natuurlijk eene spermatozoïde binnen; men ziet dikwijls een hunner na korten tijd weder verdwijnen en op een ander punt van den dooieromtrek een nieuwe voor den dag komen. Toch geloof ik dat wel meer dan ééne spermatozoïde het ei binnen dringt en meen ik het glinsterend bolletje in den eenen protoplasmaheuvel op fig. 1 als het overblijfsel daarvan te mogen beschouwen. Volgens Fol heeft ook de in het ei gedrongen spermatozoïde van *Toxopneustes lividus* het voorkomen »d'un grain assez réfringent" *). Omtrent het verdere lot der spermatozoïde kan ik niets mededeelen, uithoofde de ei-inhoud zoo donker en korrelig wordt, dat ten slotte ook van het kiemblaasje niets meer te zien is. Het is bekend dat de Zwitsersche natuuronderzoeker Fol het eerst aan de eieren van *Asterias glacialis* en *Toxopneustes lividus* heeft waargenomen, dat de dooier, op het oogenblik dat eene spermatozoïde hem nadert, haar een protoplasma-uitlooper — *cône d'attraction* gelijk hij het noemt — tegemoet zendt. Ter verklaring van deze raadselachtige werking op afstand ontwikkelt Fol †) de onderstelling, dat er misschien dunne onzichtbare uitloopers als stralen van de oppervlakte van den dooier uitgaan. Door een dezer uitloopers zou de spermatozoïde dan in verband met den dooier staan en zoo de werking op afstand slechts schijnbaar zijn. Inderdaad heeft dit vermoeden door de onderzoekingen aan het *Hermella*-ei eene groote mate van waarschijnlijkheid gekregen.

Ruim een uur na het indringen der spermatozoïde, heeft de dooier zijn ronden vorm verloren en is aan de eene pool sterk afgeplat (fig. 2). Op dit punt verzamelt zich een laagje helder korrelvrij protoplasma, uit het midden waarvan nu het eerste poolblaasje voor den dag treedt als eene volkomen glasheldere papil, met eenige weinige sterk lichtbrekende korreltjes, die zich weldra afsnoert, om een kwartier later door eene tweede gevolgd te worden. De dooier herneemt hierop zijne vroegere gedaante en weldra neemt

*) loc. cit., bl. 100.
†) loc. cit., bl. 250.

de klieving een aanvang. QUATREFAGES meent dat de eerste klievingsgroef, die het ei in twee ongelijke blastomeren verdeelt, op eene willekeurige plaats van het dooieroppervlak, nu eens hier, dan eens daar, zich vertoont; ik geloof evenwel dat zulks niet juist is, want steeds zag ik die klievingsgroeve of het eerste klievingvlak liggen in de richting van het punt waar de poolblaasjes uitgetreden waren, evenals zulks door HALLEZ *) bij *Leptoplana tremellaris* gezien is en ook door SELENKA bij *Toxopneustes variegatus* in de meeste gevallen werd waargenomen. De uitspraak van STOSSICH †) »le vesichette direttrici non servono ad altro che a determinare il punto di partenza e la direzione della prima insolcatura" schijnt mij van alle hypothesen omtrent de beteekenis der poolblaasjes door SEMPER, SELENKA, RABL, JHERING, e. a. opgesteld, het meest in overeenstemming met onze tegenwoordige kennis omtrent dit punt. Zij verdienen dan terecht met hun ouden naam van »Richtungskörper" bestempeld te worden.

Hetgeen omtrent het verder verloop der klieving door QUATREFAGES wordt medegedeeld, laat veel te wenschen over; volgens zijne waarnemingen geschiedt de klieving zoo onregelmatig, dat hij op duizenden eieren er geen twee gezien heeft waar dit proces op dezelfde wijze plaats had. Mijne onderzoekingen hebben mij evenwel tot eene andere uitkomst geleid en ik geloof dat FOL §) terecht van deze verhandeling zegt »eene reeks verschijnselen zijn als normale beschreven, hoewel zij klaarblijkelijk pathologisch zijn, en het is zelfs moeilijk in de beschrijving te onderscheiden wat tot deze laatste groep van verschijnselen behoort." Ik moet evenwel opmerken dat deze onnauwkeurigheden eenigszins te verontschuldigen zijn, deels door de kleinheid der eieren, die maakt dat het klievingsproces niet gemakkelijk is te volgen, deels

*) Contributions à l'Hist. Natur. des Tubellariés.

†) Trasformazione della vesica germinativa ez. *Estratto del Bollet. della Sc. natt. Ann.* III, (1876).

§) loc. cit., bl. 60.

door de omstandigheid dat inderdaad vele eieren zich abnormaal klieven en niet tot volkomen ontwikkeling geraken.

De klieving van het ei der *Hermella alveolata* schijnt groote overeenkomst aan te bieden met hetzelfde proces van het ei der Najaden, gelijk dit door FLEMMING is beschreven *) en van *Mytilus edulis*, volgens THÉOD. BARROIS †). Het ei verdeelt zich de eerste maal gewoonlijk in twee klievingsbollen, die ongelijk van grootte zijn, ofschoon ik geen verschil in de hoeveelheid deutoplasma bij hen heb kunnen waarnemen (fig. 3). Evenwel doet zich het eigenaardig verschijnsel voor, dat er, bij een groot aantal eieren, in plaats van twee blastomeren, terstond drie optreden. Men ziet dan op het punt, juist tegenover de plaats waar de poolblaasjes zijn uitgetreden, de dooier papilvormig uitgroeien (fig. 4); dit gedeelte, dat armer aan deutoplasma en dien tengevolge doorschijnender is dan het overige van den dooier, wordt dan de onparige van de drie klievingsbollen, die nu gelijktijdig ontstaan (fig. 5). Tijdens de vorming dezer 3 blastomeren nam ik in de onderste helft van den dooier de bekende amphiaster waar (fig. 5). STOSSICH §) heeft bij de ontwikkeling van *Serpula*-eieren ook het ontstaan van 3 blastomeren bij de eerste klieving nu en dan waargenomen, eveneens zonder nadeelige gevolgen voor het tot stand komen van het embryo. Waren er bij de eerste klieving slechts twee blastomeren ontstaan, dan snoert van de grootste van deze twee een kleinere bol zich af, zoodat nu hetzelfde stadium van 3 langs anderen weg bereikt is. Hierop volgt een stadium van 4 klievingsbollen ten gevolge der deeling van *a* (fig. 5), de kleinste der twee eerstgenoemde, zoodat het ei nu bestaat uit een grooten bol, overdekt door 3 kleinere (fig. 7). Deze deeling herhaalt zich in het volgende stadium zoodanig, dat ook de groote klievingsbol *b'* nog daaraan deelneemt en een blastomeer afscheidt, die zich naast de overige voegt en in voorkomen daarmede geheel overeenstemt (fig. 8). Eerst van nu af

*) *Sitzungsber. Kaiserl. Akad.*, Wien 3e Abth., Bd. LXXI, bl. 81.

†) *Bullet. scient. du Dép. du Nord.* T. XI. 1879.

§) *Sitzungsber. Kaiserl. Akad.*, Wien 1e Abth., LXXVII Bd., bl. 533.

schijnt de tegenstelling tusschen een vegetatief en een animaal gedeelte van den dooier voor goed op te treden. Door herhaalde klieving der animale blastomeren wordt nu het vegetatieve deel weldra omgroeid (fig. 9) en op die wijze ten slotte een amphiblastula gevormd.

Vóór het intreden van elke nieuwe klieving versmelten als het ware de oude blastomeren eerst weder met elkander en verdwijnen de groeven waardoor zij gescheiden waren bijna geheel; dit verschijnsel werd ook door RABL *) bij de klieving van het *Planorbis*-ei waargenomen en beschreven, en schijnt eveneens door QUATREFAGES opgemerkt te zijn: »la masse vitelline, après être arriveé à un certain degré de division, éprouve un mouvement contraire, un mouvement de concentration". Ongeveer 12 uren na de bevruchting is het embryo in eene mesotroche larve overgegaan, die, behalve den gordel van ciliën om het midden, nog een bundel lange trilharen aan den koppool draagt. Wellicht zijn dit de lange tentakels, die QUATREFAGES aan het vooreinde der larven meent waargenomen te hebben. Zijne voorstelling, als zoude het geheele lichaam der larven, uitgezonderd de beide uiteinden, met trilciliën bedekt zijn, evenals bij de *Terebelliden*, is dus onjuist; blijkbaar verkeerde hij onder den indru.. der kort te voren door M. EDWARDS gepubliceerde onderzoekingen. Terwijl het embryo bij zijne verdere ontwikkeling zich dicht tegen het oorspronkelijke dooiervlies aanlegt, hebben de ectodermcellen hun embryonaal karakter verloren en zijn door hun helder voorkomen en sterk korreligen inhoud van de donkere geelachtige endoderm-bollen duidelijk onderscheiden (fig. 10). Langzamerhand begint de larve hare verlengd rolronde gedaante te verliezen, uithoofde het boven den trilzoom gelegen gedeelte zich sterker begint te ontwikkelen en meer en meer bol wordt. De primordiale lichaamsholte wordt zichtbaar en de eerste sporen van het darmkanaal beginnen zich te vertoonen (fig. 11). Fig. 12 vertoont eene larve, vier dagen oud, van de buik-

*) *Morphologisches Jahrbuch*, Bd. V, bl. 562;

zijde gezien. Het praeorale gedeelte heeft nog meer de overhand gekregen en eene koepelvormige gedaante aangenomen, zoodat de mondopening eenigszins benedenwaarts gekeerd is en de zoom, waarop de trilharen geplaatst zijn, sterk naar buiten uitspringt en als een soort van mantel over het postorale deel heenbuigt. De mond voert in een wijden oesophagus die met trilciliën bekleed en door eene ringvormige insnoering van den peervormigen maagzak gescheiden is, welke met een terminaal geplaatste anus buitenwaarts mondt. Eene groeve, met trilciliën bekleed, voert langs de buikzijde naar de mondopening. Ter zijde van het darmkanaal ligt links en rechts eene groep cellen, waaruit een viertal provisorische borstels ontspringen. Aan de rugzijde van het praeorale gedeelte zijn twee bruine oogvlekjes waarneembaar.

De larve, als zij 12 dagen oud is,verschilt van de afgebeelde alleen door haar meerdere grootte, wijl het postorale gedeelte zich kegelvormig verlengd heeft; bovendien is het aantal borstels toegenomen tot een twaalftal. De verdere metamorphose was ik tot mijn leedwezen niet in de gelegenheid langer te volgen; ook is het mij niet gelukt in het water rondom de *Hermella*-banken oudere stadiën aan te treffen. Wellicht ware anders daardoor eenig meerder licht verspreid over de verwantschap dezer merkwaardige wormen met andere Annelidenfamiliën. Voor zooverre ik nu de larve heb leeren kennen, biedt zij geene onbeteekenende verschillen aan met de ons bekende larvenvormen van andere Kokerwormen; alleen de larve van *Terebellides Stroemii* vertoont eenige overeenkomst *).

Utrecht, 24 September 1880.

---

*) Willemoes-Suhm, Biologische Beobachtungen über niedere Meeresthiere. *Zeitschr. für Wissensch. Zool.* Bd. XXI.

VERSLAG

OVER DE

BEPROEVING VAN BLIKSEMAFLEIDERS,

UITGEBRACHT DOOR DE HEEREN

BOSSCHA, VAN DER WAALS en GRINWIS,

IN DE

VERGADERING VAN 27 NOVEMBER 1880 DER AFDEELING NATUURKUNDE VAN DE KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN.

De vraag, door den Generaal-Majoor, Inspecteur der Genie, in zijnen brief van 7 Augustus 1880 N°. 254 tot de Afdeeling gericht, kan op tweeërlei wijze worden opgevat. »Het onderzoek »in hoeverre bliksemafleiders in voldoenden staat verkeeren om aan hunne bestemming te kunnen beantwoorden" kan namelijk zoowel betrekking hebben op den staat, waarin de bliksemafleider verkeert onmiddellijk na zijne vervaardiging, als op den staat waarin hij verkeert eenigen tijd nadat hij werd opgesteld. Het eerste onderzoek betreft de vraag: is de bliksemafleider goed aangelegd en deugdelijk vervaardigd; het tweede onderzoek betreft de vraag: is de bliksemafleider, wat zijn beschermend vermogen betreft, nog in denzelfden staat als onmiddellijk na zijne opstelling.

Uwe Commissie onderstelt dat alleen de tweede vraag is bedoeld. Bij de eerste inrichting toch behoort men zich door toezicht bij de vervaardiging, en door den afleider, wanneer hij gereed is, nauwkeurig in oogenschouw te nemen, te overtuigen of hij beantwoordt aan de regelen en voorschriften, die ten aanzien van aanleg en samenstelling in de onder-

scheidene hierover bestaande verhandelingen en verslagen zijn gegeven. Die regelen en voorschriften betreffen de samenstelling, inrichting en plaatsing van spits en stang; het beloop van den afleider over het te beschermen gebouw; zijn verband met metalen voorwerpen op de oppervlakte van het gebouw; de toe te laten afstand tot metalen voorwerpen in het gebouw; de vraag of deze al dan niet met den afleider moeten worden verbonden; de dikte aan den geleider te geven, naar gelang van het metaal waaruit hij is samengesteld; in het bijzonder: de goede en blijvende verzekering van het geleidend verband bij alle lasschen en aanhechtingen, en eindelijk het beloop en de inrichting der grondleiding.

Al heeft deze keuring van den nieuw opgerichten afleider — eene keuring, die door nauwlettende inspectie van alle deelen kan geschieden — een voldoenden uitslag gehad, zoo moet toch, dit wordt meer en meer erkend, op vaste tijden onderzocht worden of de afleider niet door wijzigingen in het gebouw, zoowel uit- als inwendige, door werktuigelijke beleediging, en het allermeest door atmosfeerische invloeden, door inwatering en oxydatie van lasschen en aanhechtingen, onveilig geworden is. Dit onderzoek kan wel grootendeels, doch niet geheel, door inspectie van alle deelen worden verkregen. Is bij de opstelling aanteekening gehouden van het beloop en de bevestigingswijze van den afleider, van de op en in het gebouw aanwezige metaalmassaas, dan kan in den regel gemakkelijk worden nagegaan wat er in dit opzicht veranderd is in den oorspronkelijken toestand en in hoeverre hierdoor bijzondere voorzieningen vereischt worden. De veranderingen evenwel, die in het geleidingsvermogen van den geheelen afleider kunnen ontstaan zijn door slecht geleidende metaaloxydlagen in lasschen en aanhechtingen, of door het wegroesten van sommige deelen van den geleider, zijn veelal niet op het oog te onderkennen. Uwe Commissie meent dat aangaande dit deel van het onderzoek van den afleider meer bijzonder het gevoelen van de Afdeeling gevraagd wordt.

Zij acht eene afdoende wijze van onderzoek alleen mogelijk door het bepalen van den weerstand des afleiders en het ver-

gelijken van de daarvoor gevondene waarde bij den weerstand, dien de afleider onmiddellijk na de opstelling bleek te bezitten. Het bepalen van den weerstand van den afleider onmiddellijk na zijne opstelling, dat alzoo noodig is voor latere vergelijkingen, kan dan tevens een middel zijn om ook de eerste keuring te verscherpen. Immers, wanneer lengte, dikte en metaalsoort van den afleider bekend zijn, is het gemakkelijk, ten naastebij te berekenen, welken weerstand de afleider moet bezitten om geen vermoeden te geven van een slecht verband van enkele deelen.

Het meten van den weerstand kan ten eerste betrekking hebben op den geheelen afleider, van de spits tot *in* den grond, of ten tweede alleen op den geleider tot *aan* de grondgeleiding, die bestaan kan uit een in water of vochtige aarde geplaatste aardplaat of uit de ijzeren buizen van een gas- of waterleiding, waarmede de afleider in verbinding is gebracht.

De weerstand van de grondgeleiding is in den regel zeer veel grooter dan die van den afleider. Daar voor eene juiste bepaling van den weerstand noodig is, dat het te meten bedrag een niet te klein deel zij van den geheelen weerstand, die in de keten is opgenomen, zal het, in het eerste geval, wanneer men ook den weerstand van de grondgeleiding wil kennen, wenschelijk zijn, de meting te splitsen en eerst te bepalen den weerstand van den afleider tot *aan* de grondgeleiding, en daarna den weerstand van de grondgeleiding alleen.

De methode van Ohm zal in beide gevallen waarschijnlijk het eenvoudigst tot het doel voeren.

Deze methode berust op de stelling dat, wanneer de electriciteitsbron onveranderd blijft, de stroom in eene keten omgekeerd evenredig is met den weerstand der geheele geleiding. Wordt dus zekere stroom i_1 waargenomen wanneer de weerstand der geheele geleiding $R + x$ is, de stroom i_2 daarentegen wanneer uit de keten de weerstand x is weggenomen, dan is

$$i_1 : i_2 = R : R + x \quad \text{of} \quad R = \frac{i_1}{i_2 - i_1}\, x.$$

Doet men de eerste proef, in plaats van met den geleider

x, met een geleider van den weerstand a, en is in dit geval de stroom i_3, dan is evenzoo

$$R = \frac{i_3}{i_2 - i_3}\, a.$$

Uit deze twee vergelijkingen is de verhouding van x tot den bekenden weerstand a te berekenen.

De metingen kunnen verricht worden met behulp van eene tangenten-boussole, — de boussoles van SIEMENS en HALSKE verdienen om hare goede bewerking en gemakkelijke verplaatsbaarheid en opstelling de voorkeur, — en van een kleine weerstandsbank.

De metingen moeten verricht worden door een persoon, die met dergelijken arbeid vertrouwd is. Het verdient aanbeveling, haar op te dragen aan een goed geoefend telegraafbeambte, die eenige theoretische kennis heeft. Ter bepaling van den weerstand des afleiders, wordt een verbindingsdraad vastgemaakt aan het bovenste deel van den afleider, zoo na mogelijk aan de spits. Voor een goed geleidende aanhechting moet bijzonder zorg gedragen worden. De verbindingsdraad leidt tot aan de plaats des waarnemers. Van hier gaat een tweede draad naar de aardplaat of den grondgeleider.

Bij den waarnemer zijn in de keten opgenomen een Voltasche cel: bij voorkeur een koolzinkelement van BUNSEN (in geen geval een cel van LECLANCHÉ, die tot dit doel te veranderlijk is), de tangenten-boussole en de weerstandsbank. De afwijking der boussole wordt nu waargenomen: 1°. wanneer de afleider, zonder weerstand in de bank, in de keten is opgenomen; 2°. nadat de verbindingsdraad van het bovendeel des afleiders is losgemaakt en in verband gebracht met het uiteinde van den tweeden verbindingsdraad bij de grondgeleiding; 3°. nadat in deze geleiding een weerstand van 1 SIEMENS-eenheid is opgenomen. Zijn dan v_1, v_2 en v_3, naar volgorde, de waargenomen afwijkingen, dan is de weerstand des afleiders x:

$$x = \frac{tg\, v_3}{tg\, v_1}\,\frac{tg\, v_2 - tg\, v_1}{tg\, v_2 - tg\, v_3}\ \text{SIEMENS-eenheden.}$$

Ter bevordering van de nauwkeurigheid der metingen is het noodig, verbindingsdraden van goed geleidend rood koper en van niet te kleine doorsnede (2 tot 3 mM. middellijn) te nemen. Om de meting gemakkelijk te kunnen herhalen, zonder telkens naar de spits te klimmen om daar den eersten verbindingsdraad los te maken of weer vast te hechten, is het wenschelijk twee draden *a* en *b* van gelijken weerstand te gebruiken, waarvan *a* gedurende de proef met de spits verbonden blijft, terwijl *b* bestemd is om, bij de tweede meting, in plaats van *a* met den tweeden verbindingsdraad aan de grondgeleiding verbonden te worden en ook in de derde meting, met den bijgevoegden weerstand, de keten te sluiten.

De SIEMENS-boussoles zullen bij de dus te nemen proef allicht te groote afwijking geven. Men komt hieraan te gemoet door slechts een deel van den stroom door de boussole te laten gaan en het grootste deel door een vasten hulpsluitdraad, die de uiteinden van den geleider der boussole verbindt, af te leiden.

Door de lengte van dezen hulpsluitdraad te vergrooten of te verkleinen, kan men de afwijkingen der naald zóó regelen dat zij bij sluiting door den afleider alleen omstreeks 50° bedragen.

De meting van den weerstand der grondleiding is iets meer samengesteld. Vooreerst dient een tweede hulpgrondleiding te worden aangebracht, waarvoor gebruikt moet worden een koperen plaat van 1 M² oppervlakte, die in een naburige wel, kanaal of sloot — geen regenbak — wordt neergelaten, zoodat hij geheel met water in aanraking is. Bevindt zich in de onmiddellijke nabijheid eene ijzeren gas- of waterleiding, die niet voor grondgeleiding des afleiders dient, dan kan zij in plaats van de hulp-aardplaat worden aangewend. Men heeft, om den invloed te kunnen wegcijferen van de electromotorische kracht, die in de keten ontstaat door de aanraking van de grondgeleidingen met water of vochtigen grond, thans vier metingen te doen, te weten:

1°. wanneer de twee draden, die van den waarnemer naar de beide grondgeleidingen loopen, aan de van den waarnemer verwijderde einden met elkander verbonden zijn;

2°. wanneer in de zoo even gevormde geleiding een weerstand van 1 SIEMENS-eenheid is opgenomen;

3°. wanneer de twee draden elk met hunne grondgeleiding zijn verbonden;

4°. wanneer bij deze laatste proef bovendien nog een weerstand van 20 SIEMENS-eenheden is opgenomen.

Bij deze proeven zal de hulpsluitdraad der boussole in den regel weggenomen moeten zijn. Mocht de stroom dan bij de twee eerste proeven te sterke uitwijking geven, dan kan men in de geleiding eenigen weerstand opnemen om den stroom te verzwakken. Deze weerstand moet dan in de volgende proeven in de keten blijven. Is hij aanmerkelijk, dan zal het goed zijn in de tweede proef, in plaats van één SIEMENS-eenheid, meerdere in te lasschen. Is dit aantal n en zijn de vier waargenomene afwijkingen naar volgorde v_1, v_2, v_3 en v_4, dan leeren de twee eerste proeven den weerstand R kennen van de geheele geleiding der eerste proef, door de vergelijking

$$R = \frac{tg\ v_2}{tg\ v_1 - tg\ v_2} \times n \text{ SIEMENS-eenheden;}$$

de derde en vierde geven op de zelfde wijze den weerstand W van de geheele geleiding in de derde proef, te weten:

$$W = \frac{tg\ v_4}{tg\ v_3 - tg\ v_4} \times 20 \text{ SIEMENS-eenheden,}$$

en daar W gelijk is aan $R + x$, wanneer x den weerstand der grondgeleiding is, zoo kan x gemakkelijk berekend worden.

Als toelichting kan de volgende bepaling dienen van den weerstand eener grondgeleiding, verkregen door éénen draad te verbinden met de gasleiding van het physisch kabinet der Polytechnische school, den anderen met een rood-koperen plaat van 1 M² oppervlakte en die gedompeld was in eene wel in den kelder van dat gebouw.

In de keten was opgenomen een SIEMENS-boussole en een SIEMENS-rheostaat. De stroom liep onverdeeld door de boussole, doch was verzwakt door inlassching van 10 SIEMENS-eenheden van den rheostaat.

De volgende afwijkingen werden als gemiddelden van eenige opteekeningen waargenomen.

I. $v_1 = 55^0\ 34',\ 8$

II. $v_2 = 21^0\ 54',\ 0$ bijgevoegde weerstand $= 30.$

$v_2 = 10^0\ 15',\ 0$ » » $= 80.$

III. $v_3 = 20^0\ 29',\ 4$

IV. $v_4 = 8^0\ 21',\ 0$

Uit I en II vindt men $R = 11{,}40$

$R = 11{,}31$

naar gelang de weerstand uit de bijvoeging 30 of 80 wordt berekend.

Uit III en IV volgt $R + x = 32{,}31$

dus $x = 20{,}96.$

De herhaling van III en IV bij omgekeerden stroom gaf

$v_3 = 26^0\ 34',\ 8$

$v_4 = 12^0\ 3',\ 0$

Waaruit $R + x = 37{,}22$

$x = 25{,}87.$

Gemiddeld was derhalve de weerstand der grondgeleiding 23,4 SIEMENS-eenheden *).

In de Akademie van Berlijn zijn in 1876 en 1877 door

---

*) De ongelijke waarden, voor x gevonden (20,96 en 25,87), al naar gelang van de richting van den stroom, kunnen verklaard worden door de opmerking, dat in het eerste geval de waterontleding in de grondgeleiding waterstof aan de ijzeren gasleiding, in het tweede geval waterstof aan de koperen plaat deed ontstaan. Daar het gas een slechte geleider is, zal daardoor de weerstand vergroot worden; wegens de zeer groote oppervlakte van het gasbuizennet zal deze weerstandsvermeerdering aan de gasleiding onbeduidend, daarentegen aan de koperen plaat zeer merkbaar kunnen zijn.

In WEIDENBACH's *Compendium der electrischen Telegraphie*, Wiesbaden 1877, blz. 45, vindt men voor den weerstand der grondgeleiding opgegeven 33 SIEMENS, wanneer die uit twee aardplaten bestaat van 1 M² oppervlakte en op voldoenden afstand van elkaar in water gedompeld. Uit de cijfers 20,96 en 25,87 blijkt dus, dat een gasleiding aanmerkelijk minder weerstand in de grondgeleiding geeft dan een aardplaat.

eene Commissie, bestaande uit HELMHOLTZ, KIRCHHOFF en SIEMENS verslagen uitgebracht, waarin bijzonder de invloed van de grondgeleidingen op de afvloeiing van de electriciteit eens bliksemstraals behandeld werd. De Commissie meende zeer groote aardplaten te moeten voorschrijven, terwijl daarentegen RIESZ de noodzakelijkheid daarvan ontkende. Neemt men met de Commissie der Berlijnsche Akademie aan, dat de grondplaat niet kleiner dan 1 M^2 mag zijn, dan zou dus de uitkomst der meting van den weerstand der grondgeleiding bij een goed te keuren afleider niet veel van 30 tot 40 SIEMENS-eenheden moeten verschillen, wanneer de afleider in een aardplaat uitloopt, en niet veel van 20 tot 30, wanneer eene gas- of waterleiding dient. Zonder hieromtrent een voorschrift te willen geven, meent de Commissie evenwel dat de hierboven medegedeelde cijfers binnen voldoende grenzen aanduiden, welke weerstand in eene grondplaat van gegevene afmetingen moet verwacht worden, wanneer er geen vermoeden zal ontstaan dat zij gebrekkig is geworden.

Zijn de grondplaat en de geleiding, die van den afleider daarheen voert, gemakkelijk bloot te leggen, dan blijft een plaatselijk onderzoek altijd aan te bevelen en, wanneer de weerstandsbepaling onzekerheid mocht overlaten, boven deze laatste te verkiezen. Voor een geregeld terugkeerend onderzoek van een afleider zal het noodig zijn, een behoorlijk proces-verbaal van elke beproeving op te maken en ter vergelijking bij eene volgende te bewaren.

De Commissie,

J. BOSSCHA,
J. D. VAN DER WAALS,
C. H. C. GRINWIS.

BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS VAN NORMAAL CYAANZUUR,

DOOR

E. MULDER.

EERSTE GEDEELTE.

De theorie laat toe het bestaan van drie cyaanzuren en wel:

I. $O=C=N-H$
II. $N\equiv C-O-H$
III. $=C=N-O-H.$

Een cyaanzuur van de laatste structuurformule, dat men zou kunnen noemen: carbylcyaanzuur, is tot nog toe onbekend. Dit lichaam zal waarschijnlijk kunnen verkregen worden naar eenige der methoden aangewend ter bereiding van carbylaminen, uitgaande van een verbinding $NH_2OC_2H_5$, maar wellicht slechts kunnen bestaan in den vorm eener alkylverbinding, b. v. als $=C=N-O-C_2H_5$.

De scheikundigen hielden zich bijkans uitsluitend bezig met de studie van het gewone cyaanzuur, ook wel isocyaanzuur genoemd. De feiten leiden er toe om hier aan toe te kennen de formule: $O=C=N-H$. Het kan optreden in vrijen staat, als metaalzout en als alkylverbinding. In vrijen toestand en als alkylverbinding bezit het groote neiging tot polymeriseeren. De kennis aangaande een

cyaanzuur van de structuur $N \equiv C—O—H$, *normaal cyaanzuur* geheeten, is zeer beperkt. In vrijen staat is het onbekend.

BANNOW *) meent het wellicht te hebben verkregen als kaliumzout, zoo bij verhitting van paracyaan met kaliumhydroxyde, bij inwerking van chloorcyaan op potassaloog en verwarming van kaliumisocyanaat met ioodcyaan. Dit zout zou krystalliseeren in lange dunne naalden. Den krystalvorm uitgenomen en de eigenschap, om onder sommige omstandigheden aanleiding te geven naar BANNOW tot het doen ontstaan van een verbinding $NH.2CN$, zou het kaliumnormaalcyanaat overeenkomen met het kaliumisocyanaat. Van een meer ernstigen aard zijn de onderzoekingen van CLOËZ †), die chloorcyaan liet inwerken op natriumaethylaat in alkoholischaetherische oplossing, bij welke reactie zou kunnen ontstaan aethylnormaalcyanaat:

$$Cl—C \equiv N + C_2H_5—O—Na = ClNa + N \equiv C—O—C_2H_5.$$

Na inwerking werd gefiltreerd en het filtraat ingedampt, waarna een vloeistof terugblijft, die, zooals CLOËZ zegt, ter verwijdering van eenig chloornatrium *is te wasschen met water*, waarin zij naar dezen scheikundige onoplosbaar is. Dit lichaam nu schijnt nagenoeg algemeen beschouwd te worden als aethylnormaalcyanaat. Zoo zegt het *Neues Handwörterbuch* van FEHLING (zie artikel: cyaanzuur): »Die wahren Cyansäure äther ($NC.OC_2H_5$ en analogen) wurden von CLOËZ entdeckt, der sie durch Einwirkung von Chlorcyan auf Natriumalkoholaten dargestellt hat."

GAL §) ging de inwerking na van chloorwaterstof op dit lichaam, waarvan evenwel CLOËZ hem de noodige hoeveelheid had gegeven. Eindelijk onderzocht A. W. HOFMANN **) eenige verbindingen die ontstaan, wanneer het product gevormd na

---

*) *Dt. chem. Ges.* 4. 254.

†) *Compt. rend.* 44. 482; *Ann. Ch. Ph.* 137, 127; zie ook *Dict. Wurtz Art.* acide cyanique p. 1073.

§) *Compt. rend.* 61. 527; *Ann. Ch. Ph.* 137, 127.

**) *Dt. chem. Ges.* 3. 271.

bovengemelde reactie op aethylalkohol of methylalkohol, bij zuivering door overhaling van alkohol, eenigen tijd aan zich zelf werd overgelaten. Deze scheikundige liet zich evenwel niet in met de moederstoffe.

Ziedaar in weinige woorden den stand van zaken. BANNOW is dus de eenige, die getracht heeft na te gaan, of er bestaat een kaliumnormaalcyanaat, en CLOËZ alleen maakte een studie van methyl- en aethylnormaalcyanaat, terwijl HOFMANN zich onledig hield met eenige alkylnormaalcyanuraten.

Houden we ons thans in de eerste plaats bezig met de vraag, of een bestaan van *kaliumnormaalcyanaat* als waarschijnlijk is aan te nemen.

Van de methoden, ter bereiding van een lichaam gegeven, dat wellicht naar BANNOW gemeld zout zou kunnen wezen, is die met ioodcyaan zeker wel de meest eenvoudige. Bij verwarming nu gedurende ongeveer 24 uren van 2 gr. kaliumisocyanaat en 0,3 gr. ioodcyaan bij 100°, werd door mij een product verkregen, dat nagenoeg onoplosbaar scheen te zijn in absoluten alkohol, daarentegen uit alkohol van 90 p.c. krystalliseerde in lange dunne naalden, naar 't schijnt overeenkomende met die door BANNOW oppervlakkig beschreven. Een andere proef met 4 gr. kaliumisocyanaat en 0,2 gr. ioodcyaan gaf een product, dat zich afzette in schoone vedervormige lange krystallen. Minder schoon gevormd ontstonden deze bij toevoeging van ioodcyaan bij OCNK in alkohol en daarna omkrystallisatie. Bij verder onderzoek bleek, dat de krystallen van kaliumisocyanaat eveneens de eigenschap bezitten, om zich eenigermate vedervormig af te zetten, maar op verre na niet zoo schoon, als bij aanwezigheid van ioodcyaan, en wel vooral na verhitting daarmede in drogen staat het geval kan wezen.

De lange dunne naalden, aanvankelijk verkregen, verhielden zich dan ook, met de loupe bezien, niet als krystallographische individuen, maar bleken te zijn uiterst fijn vedervormig gevormde krystallen. Evenmin als van kaliumisocyanaat kan hier gedacht worden aan een bepaling van krystalvorm. Naar BANNOW nu verhoudt zijn lichaam zich in 't algemeen als OCNK; zoo straks bleek dan ook, dat het in alkohol

zoo goed als onoplosbaar schijnt te zijn, gelijk het geval is met OCNK. BANNOW wijst evenwel op een verschil met OCNK, daârin bestaande, dat zijn zout na langen tijd in oplossing met alkali te hebben gestaan en na neutralisatie, een kleurloos lichtbestendig neêrslag zou ontstaan met zilvernitraat van de formule C_2N_3Ag, in vrijen staat dus C_2N_3H, naar hem wellicht te beschouwen als NH.2CN.

Let men op de weinige bestendigheid van OCNK in oplossing, waarvoor het kaliumnormaalcyanaat niet zou onderdoen, dan zal men mij wel ten goede willen houden, dat de moed ontbrak, om het al of niet gevormd worden na te gaan van een verbinding, die meer dan waarschijnlijk onder gemelde omstandigheden niet kan ontstaan.

Alvorens verder te gaan, mag ik met een woord mededeelen, dat broomcyaan evenmin schijnt in te werken op OC.NK als ioodcyaan, wel te verstaan bij ongeveer 100°; met broomcyaan kan men niet veel verder gaan, of het wordt gepolymeriseerd.

Gemelde mededeeling van BANNOW gaf mij aanleiding, in verband met proeven van A. W. HOFMANN *), om in die richting te experimenteeren. In de eerste plaats liet ik cyaan inwerken op natriumcyanamid (in alkoholische oplossing). De reactie kon aldus verloopen (zoogenaamd cyanamid beschouwd als $NC.NH_2$):

$$\begin{matrix} CN \\ | \\ CN \end{matrix} + NC - NHNa = NC.Na + NC.NH.CN.$$

De materialen, hiertoe aangewend, waren zoo zuiver mogelijk. Opmerkenswaardig was, hoe iedere gasbel cyaan hare bruine sporen achterliet, om ten slotte een donkergekleurde massa te vormen, waarmede wel niet veel goeds was aan te vangen.

HOFMANN liet cyaan inwerken op cyanamid en zegt daaromtrent: »Cyanamide is, in fact, capable of fixing the ele-

*) LAND, *R. Soc. Proc.* Vol. 11, 277.

ments of cyanogen, being converted into a yellowish amorphous powder, which, when heated with acids, furnishes a beautiful-crystalline compound, difficultly soluble in water, and deposited from the boiling solution on cooling in long slender needles."

Ik liet cyaan gaan door een aetherische oplossing van cyanamid (zeer zuiver); bij verdamping van den aether bleef evenwel cyanamid onveranderd terug. In geconcentreerde alkoholische oplossing (de alkohol was als de aether gezuiverd met natrium), bleek zelfs na lang staan niets te zijn gevormd van een additieproduct. Wel ontstond ten slotte na lang staan een zeer gekleurd condensatieproduct, maar dat wel niets gemeen kon hebben met gemeld additieproduct, en dan ook met zoutzuur geen kleurloos krystallijn product gaf. Zonder twijfel werkte HOFMANN onder andere omstandigheden.

Keeren we na deze afwijking terug tot het zout van BANNOW, dat tevens zou gevormd worden bij inwerking van chloorcyaan op een waterige sterke oplossing van potassa. In plaats van chloorcyaan werd uitgegaan van broomcyaan. Op 8,3 gr. potassa en 20 gr. water werden genomen 10 gr. broomcyaan, aanwezig in een buis, waarin de potassaloog onder afkoeling langzamerhand werd gedaan; na reactie werd fractionnair neêrgeslagen met alkohol. Een genoegzame scheiding van kaliumcyanaat en broomkalium was wel niet te bereiken, en ten slotte werd een cyanaat afgezet (met eenig broomkalium vermengd), waarin geen verschil werd opgemerkt met het kaliumisocyanaat OCNK.

Als laatste proef liet men een alkoholische oplossing van broomcyaan inwerken op een alkoholische oplossing van potassa (als bij de voorgaande ongeveer in de verhouding van BrCN en 2KOH). Het filtraat zette een kleine hoeveelheid af van een zout, waarvan meer werd erlangd bij uitkoken van het aanvankelijk gevormde afzetsel met alkohol van 90 p. c. Van het ontstaan van een kaliumnormaalcyanaat werd niets waargenomen, maar opmerkenswaardig was een sterke knoflookreuk, die deed denken aan de vorming van een carbylamine.

Na het medegedeelde mag als waarschijnlijk worden aan-

genomen, dat het lichaam van BANNOW is kaliumisocyanaat OCNK, hetwelk onder sommige omstandigheden in een eenigszins anderen vorm kan krystalliseeren, zooals met zoovele stoffen het geval is. Zoo krystalliseert broomcyaan aanvankelijk in naalden, om weldra over te gaan in teerlingen.

Een nader onderzoek betreffende de merkwaardige reactie van CLOËZ, die met recht zoo de aandacht trok der scheikundigen, kon dankbaarder zijn dan dat met het lichaam van BANNOW, in zooverre als deze reactie in den grond zonder twijfel aanvankelijk verloopt als vroeger werd medegedeeld. Toch biedt het lichaam van CLOËZ vele duistere punten aan, en de vraag zou kunnen gedaan worden, of dit wel in werkelijkheid is aethylnormaalcyanaat, of daarvan is een afgeleide, wellicht een mengsel van afgeleiden. Zoo is het s. g. dezer vloeistof (1,1271) betrekkelijk veel hooger dan dat van het aethylisocyanaat $O=C=N-C_2H_5$ (0,898). Dit laatste is een vluchtige dunvloeibare stof (kookpunt 60^0), terwijl het lichaam van CLOËZ een lijvige vloeistof vormt, te weinig standvastig om te kunnen worden overgehaald. Hetzelfde geldt van de overeenkomstige methylverbindingen. Het s. g. in gasvorm van het lichaam van CLOËZ is derhalve onbekend, en daarmede onbekend het gevonden moleculairgewicht. Dit laatste zou dus op andere wijze moeten worden afgeleid, dat tot nog toe niet is geschied.

Reeds vroeger werd met een enkel woord medegedeeld, dat HOFMANN zich onledig hield met een studie van afgeleiden, die gevormd worden, wanneer het ruwe product (verkregen door ClCN en C_2H_5ONa, filtratie en overhaling van aanwezigen alkohol) veelal geruimen tijd aan zich zelf werd overgelaten. HOFMANN erlangde een bruine olie, soms zelfs slechts een vaste bruingekleurde massa; de eerste werd na staan gedeeltelijk vast. Uitgaande van methylalkohol, verkreeg deze scheikundige een mengsel, dat, na omkrystalliseeren en ontkleuring met dierlijke kool, twee stoffen gaf, namelijk normaal cyanuurzuurmethyl en normaal monamidocyanuurzuurmethyl; met aethylalkohol vermocht hij niet eens te bekomen normaal cyanuurzuuraethyl, maar werden afgezonderd twee lichamen, gedetermineerd als normaal monamido- en diamido

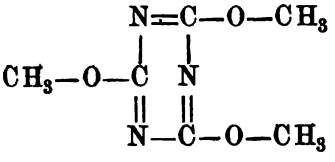
cyanuurzuuraethyl. Daar HOFMANN denzelfden weg insloeg als CLOËZ (alleen maakte hij geen gebruik van aether), mag als waarschijnlijk worden aangenomen, dat de methode van CLOËZ aanleiding kan geven tot de vorming van andere produkten. Dat een lichaam van de structuur $N \equiv C-O-CH_3$ gemakkelijk polymeriseert, heeft niets bevreemdends, daar ook $O=C=N-CH_3$ deze eigenschap bezit. De vraag is evenwel, vanwaar genoemde amidoverbindingen? HOFMANN schijnt geneigd, dit toe te schrijven aan toegetreden water, dat ontledend zou inwerken op $N \equiv C-O-CH_3$ (of C_2H_5), als gevolg waarvan ontstaan:

a. $N \equiv C-O-CH_3 + H_2O = OCNH + CH3-OH$
b. $O=C=N-H + H_2O = CO_2 + NH_3$,

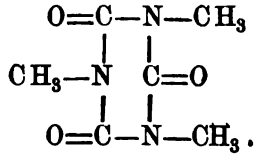
welk NH_3 dan zou reageeren op normaal cyanuurzuurmethyl (of aethyl), en gemelde amidoverbindingen doen ontstaan. Later zal blijken, dat b. v. $N \equiv C-O-C_2H_5$ wellicht niet zoo snel wordt ontleed door water.

Van de door HOFMANN onderzochte verbindingen is zeker de meest belangrijke zijn normaal cyanuurzuurmethyl, dat naar hem bij overhaling zou overgaan in isocyanuurzuurmethyl:

Normaal cyanuurzuur methyl:



Isocyanuurzuur methyl:



Hieruit mag dan worden opgemaakt, dat isocyanuurzuurmethyl stabieler is dan normaal cyanuurzuurmethyl, en niet onwaarschijnlijk zal dus $N \equiv C-O-CH_3$ minder stabiel wezen dan $O=C=N-CH_3$; hetzelfde geldt noodwendig van andere alkylverbindingen, als van metaalverbindingen, die, zooals vroeger bleek, van normaal cyanuurzuur niet schijnen te kunnen bestaan, evenmin als van normaal cyanuurzuur.

Uit het voorgaande kan wel blijken, dat men hier te doen heeft met een moeielijk onderzoek. Zuiverheid zooveel moge-

lijk der aan te wenden materialen moet derhalve beschouwd worden als een eerste vereischte, zal men niet dadelijk vervallen in een polymerisatieproduct en afgeleiden. Denken we er slechts aan van hoe weinig het afhangt, of bij inwerking van $SO_2.OH.OCH_3$ en $O=C=NK$, ontstaat $O=C=N-CH_3$ of bijkans uitsluitend isocyanuurzuurmethyl, welk laatste toch altijd in een noemenswaardige hoeveelheid optreedt. Bij de volgende proeven werd daarom de meeste zorg besteed aan het zooveel mogelijk zuiveren van alkohol en aether (met natrium). En in plaats van het gasvormige chloorcyaan, dat betrekkelijk gemakkelijk polymeriseert, en wellicht de neiging tot polymeriseeren bevordert van het $N\equiv C-O-C_2H_5$ (of CH_3 enz.), werd genomen broomcyaan, dat in schoone krystallen kan optreden en niet zoo gemakkelijk een isomere wijziging ondergaat, terwijl het, naar de door mij gevolgde methode, zonder veel bezwaar in groote hoeveelheid en zuiver is te maken.

Bij 31 gew.-d. aethylalkohol werden gevoegd 63 gew.-d. aether, waarin, onder afkoeling met koud water, werden opgelost 2,1 gew.-d. natrium. Bij deze oplossing nu liet men langzamerhand, onder afkoeling met water, vloeien een oplossing van 11 gew.-d. broomcyaan in 55 gew.-d. aether, gedaan in een chamaeleon-burette. De reactie gaat zeer glad, en duidelijk is het punt waar te nemen, wanneer geen broomnatrium meer wordt gevormd; evenwel werd steeds een kleine overmaat van broomcyaan gebruikt. Na filtratie (onder een klok) werd overgehaald, waarna de terugblijvende vloeistof in een kleine buis met afleidingsbuis langen tijd werd verhit in een bad van kokend water, om zooveel mogelijk aether en alkohol te verwijderen, en zelfs nog een groot half uur, nadat niets meer was overgegaan.

Cloëz zuiverde het ruwe product, door hem verkregen bij inwerking van chloorcyaan op $C_2H_5.ONa$, filtratie en overhaling van den alkohol, met *water*, met het doel eenig chloornatrium te verwijderen; daarna werd gedroogd boven zwavelzuur in vacuo. Dit product is dan naar Cloëz, uitgaande van aethylalkohol, aethylnormaalcyanaat, thans te schrijven $N\equiv C-O-C_2H_5$, isomeer en wel metameer met

aethylisocyanaat: $O=C=N-C_2H_5$, terwijl methylalkohol een overeenkomstig product gaf.

Reeds uit de zuiveringsmethode volgt, dat het lichaam van CLOËZ zoo goed als *onoplosbaar* is in water, terwijl hij niet gewaagt van in water oplosbare verbindingen. CLOËZ zegt van zijn lichaam: »La cyanétholine (zoo noemde hij het aethylnormaalcyanaat) est *insoluble* dans l'eau", en tevens: »il a seulement un caractère commun avec l'éther cyanique (namelijk: $O=C=N-C_2H_5$), c'est son insolubilité dans l'eau; cette propriété permet de le débarasser par le lavage des traces de chlorure de sodium qu'il retient."

Men mag dus wel als zeker aannemen, dat de stof van CLOËZ, door hem en in 't algemeen door de scheikundigen beschouwd als aethyl- (of methyl- enz.) normaalcyanaat, *onoplosbaar* is in water.

De methode volgende, vroeger medegedeeld, werd door mij nagenoeg verkregen de theoretische hoeveelheid aan ruw product, berekend namelijk op $N\equiv C-O-C_2H_5$. Nemen we de som aan opbrengst der drie eerste bereidingen, die ieder voor zich in dit opzicht goed overeenkomen, dan werd, uitgaande van 7,6 gr. natrium, erlangd 24 gr. aan ruw product, terwijl de theorie eischt 23,4 gr.; er werd dus wat te veel verkregen. Men berekende op natrium en niet op broomcyaan, daar dit laatste steeds in eenige overmaat werd genomen, en er altijd wat van vervluchtigt. De hoeveelheid gevormd broomnatrium stemde eveneens genoegzaam met de theorie. Het destillaat (aether en alkohol) rook duidelijk naar broomcyaan; de kleine overmaat van dit lichaam schijnt dus niet aan eenige reactie deel te nemen.

Het ruw product was slechts uiterst weinig gekleurd, hetgeen pleit voor de zuiverheid der bij de bereiding aangewende stoffen. Het verschijnsel nu deed zich voor, dat bij toevoeging van water aanvankelijk niets werd afgezet, terwijl ter geheele praecipitatie ongeveer 50 C.C. water werden vereischt. De afgezette olie werd met water gewasschen en wel daartoe verbruikt nagenoeg 65 CC., welke laatste hoeveelheid water, gedaan bij de moederloog, om toch vooral zeker te zijn van het in water onoplosbare lichaam

te worden bevrijd. Van deze lijvige vloeistof, blijkbaar het lichaam van Cloëz, werd ongeveer erlangd 5,6 gr. (nog eenig water houdend), derhalve moesten 24 – 5,6 = 18,4 gr. van het ruwe product in oplossing zijn gegaan, dus verreweg het grootste gedeelte der oorspronkelijke stof mag geacht worden *oplosbaar* te zijn in water. Men liet de waterige oplossing een halven dag staan, omdat nog wat van de olie in suspensie was, waarna om dezelfde reden werd gefiltreerd door fijn filtreerpapier, en thans het heldere filtraat bij herhaling uitgeschud met aether (niet gezuiverd). Na verdampen grootendeels van den aether op een waterbad, werd het terugblijvende, dat een zoo goed als kleurlooze vloeistof vormde, evenals het lichaam van Cloëz (eenigermate geel gekleurd), geplaatst boven zwavelzuur onder een kleinen glazen exsiccator. Beiden werden nu en dan gewogen, waarvan de uitkomst in de volgende opgave is medegedeeld:

Lichaam van Cloëz, aanvankelijk bedragende 5,6 gr. (bevatte nog eenig water).	In water oplosbaar product, aanvankelijk 14 gr. (hield wat aether en water in).	
Verlies in gewicht telkens na één dag:		
0, 5 gr.	2, 2 gr.	
0, 3 »	0, 9 »	
0, 1 »	0,87 »	
0,15 »	0,62 »	
0,06 »	0,62 »	
0,06 »	0,47 »	begint te krystalliseeren).
0,06 »	0,24 »	
0,06 » (vangt aan met te krystalliseeren).	0,21 »	
0,05 »	0,16 »	

Na drie dagen bleek de eerste vloeistof te zijn verminderd in gewicht 0,15 gr. en de andere 0,3 gr., waarna met wegen werd opgehouden.

Het oplosbare product werd langzamerhand dik vloeibaar en gedeeltelijk onoplosbaar in water.

Het zwavelzuur, van tijd tot tijd ververscht, werd vooral

in 't begin tamelijk gekleurd, terwijl zich tegen den wand van het vat met dit zuur een kleurlooze vaste stof afzette; later was hiervan minder waar te nemen.

Nadat de vorming van krystallen reeds was aangevangen, die langzaam vorderde, werd overgegaan tot de analyse.

I. Van de vloeistof, aanvankelijk oplosbaar, gaf 0,3747 gr. stof, 0,6064 gr. koolstofdioxyde en 0,265 gr. water;

II. een paar dagen later gaf 0,254 gr. stof 0,415 gr. koolstofdioxyde en 0,1798 gr. water.

Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	I.	II.
koolstof.	44,1	44,5
waterstof	7,8	7,8.

Van het product met water, uit het ruwe mengsel neêrgeslagen (lichaam van CLOËZ *)), gaf 0,1379 gr. stof 0,2582 gr. koolstofdioxyde en 0,105 gr. water;

Na eenige dagen gaf 0,2311 gr. stof bij 755 mm. bar. en 10,4° aan stikstof 33,1 C.C..

Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	I.	II.
koolstof	51,0	—
waterstof.	8,4	—
stikstof.	—	16,4.

---

*) Men mag niet onvermeld laten, dat de uitkomsten der analyse van CLOËZ wel zeker zullen voorkomen in zijn: *Thèses de la Faculté des Sciences de Paris*, Août 1866 (welk werk echter niet in den handel zal wezen), maar dat CLOËZ van zijn cijfers niets mededeelt in het uittreksel, opgenomen in de *Compt. rend.*. Vrij uitvoerig is de uitkomst van gemeld werk teruggegeven in de "*Dictionaire de Chimie*" van WURTZ (zie art.: "acide cyanique") maar daarin zijn noodwendig niet de analysen opgenomen. Evenwel volgt misschien uit het laatste uittreksel, dat de vloeistof van CLOËZ, beschouwd als $NC.OC_2H_5$ (en $NC.OCH_3$) nog wel wat te wenschen overliet, wat zuiverheid aangaat. Duidelijker spreekt dit, alhoewel indirect, uit de onderzoekingen van HOFMANN, die geen cijfers mededeelt (eenige smeltpunten uitgezonderd). Hier vertoont zich derhalve het eigenaardig verschijnsel, dat in een der meest belangrijke onderzoekingen, die de scheikunde aanbiedt, van alle produkten geanalyseerd (door CLOËZ en HOFMANN) mij niet één analyse bekend is.

Nadat zich uit de in water aanvankelijk oplosbare vloeistof een betrekkelijk groote hoeveelheid krystallen had afgezet, werd op nieuw geanalyseerd (zie pag. 233).

0,2688 gr. vloeistof gaf 0,446 gr. koolstofdioxyde en 0,1896 gr. water;

0,1767 gr. stof gaf bij 11,5° en 758 mm. bar. aan stikstof 30 C.C..

Op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

koolstof	45,2
waterstof.	7,8
stikstof.	20,1.

De krystallijne stof hieruit aanvankelijk afgezet, krystalliseerde uit warm water in dunne naalden. Later zette zich een stof af in breede lange naalden, zeer oplosbaar in water bij gewone temperatuur, urethaan: $NH_2 . CO . OC_2H_5$. De terugblijvende vloeistof levert met water een daarin onoplosbare olie, die, verhit met KOH-loog, met zoutzuur een krystallijne stof geeft, en wel cyanuurzuur. Deze olie vormt bij staan met water een daarin weinig oplosbare krystallijne verbinding; de olie is dus zeker geen aethylcarbonaat: $CO . 2O C_2H_5$.

De vloeistof van Cloëz zet een wratvormig gekrystalliseerde verbinding af met een smeltpunt nabij 25°. De analysen, gedaan met dit en andere producten, zullen later worden medegedeeld. Uit het voorgaande blijkt voldoende, dat men wellicht op weg is om de reactie van Cloëz beter te leeren kennen dan tot nog toe het geval was. En reeds thans is het duidelijk, dat het ruwe product, behandeld met water, aan dit laatste kan afstaan het aethylnormaalcyanaat, dat dan langzamerhand aanleiding geeft tot condensatieproducten, terwijl het lichaam van Cloëz een dezer condensatieproducten of afgeleide vormt. Gaat men na, dat normaal cyanuurzuurmethyl uit warm water kan worden omgekrystallyseerd, dan zou een oplosbaar zijn van $N \equiv C—O C_2H_5$ in water, als zoodanig of in verbinding met alkohol, niet zoo bevreemdend zijn.

De vorming van urethaan kan een gevolg zijn daarvan, dat een deel aethylnormaalcyanaat water opneemt:

$$N \equiv C—O\,C_2\,H_5 + H_2\,O = N\,H_2—C\,O—O\,C_2\,H_5,$$

zooals isocyaanzuuraethyl dit doet, om dan evenwel te worden ontleed:

$$O = C—N\,C_2\,H_5 + H_2\,O = N\,H_2\,.\,C_2\,H_5 + C\,O_2.$$

Het groote bezwaar, dat men hier ontmoet, is een voorkomen van condensatie, en bijzondere kunstgrepen zullen moeten aangewend worden, om het aethylnormaalcyanaat in zuiveren staat te kunnen verkrijgen.

Van een zuiveren toch door overhaling schijnt geen sprake te zijn. Zoo vormt het ruwe product reeds bij 110°—120° onder anderen eene kleine hoeveelheid eener *sterk riekende* vloeistof, wellicht iets zwaarder dan water, terwijl het terugblijvende, vooral bij hoogere temperatuur (tot ongeveer 200°), dik vloeibaarder en meer donkergekleurd wordt. Van urethaan en aethylcarbonaat blijkt hierbij niets. Gemelde reuk schijnt eenige overeenkomst te hebben met dien, ontwikkeld door cyaan en $C_2\,H_5\,.\,O\,Na$. Bij deze laatste reactie, die aldus zou kunnen verloopen:

$$\begin{matrix} CN \\ | \\ CN \end{matrix} + C_2\,H_5—O\,Na = N\,C\,Na + N\,C—O—C_2\,H_5,$$

wordt de massa langzamerhand bruin gekleurd. Na filtratie, gedeeltelijke overhaling van het filtraat ter verwijdering van alkohol, opnieuw filtratie van eenige gekleurde stof, die zich had afgezet, en destillatie, blijft een onzuiver product terug met sterken reuk, die evenwel *niet* herinnert aan dien, eigen aan carbylaminen.

Opmerkenswaardig is ook, dat bij inwerking van $C\,N\,Br$ op $C_2\,H_5\,.\,O\,Na$, de reuk van aethylisocyanaat: $O = C = N—C_2\,H_5$ hoegenaamd niet werd opgemerkt.

Dat het product van $N\,C\,Br$ en $C_2\,H_5\,.\,O\,Na$ niet is $= C = N—O—C_2\,H_5$ (zie pag. 223), volgt eenigermate uit de ontledingsprodukten van normaal cyanuurzuurmethyl met

potassa, door HOFMANN erlangd, namelijk *isocyanuurzuur* (normaal cyanuurzuur is in vrijen staat en als metaalzout onbekend) en *methylalkohol*. Een lichaam van gemelde formule zou waarschijnlijk ook weinig neiging hebben tot polymerisatie, en een reuk bezitten, zeker wel herinnerende aan dien van carbylaminen.

Aanleiding tot de vorige onderzoekingen gaf cyanamid, en wel wenschte ik te weten of aethylnormaalcyanaat met ammoniak dit lichaam vormt. Eenige jaren geleden *) namelijk werd met deze verbinding een weinig door mij gearbeid en als gevolg daarvan meende ik te moeten aannemen, dat dusgenaamd cyanamid hoogstwaarschijnlijk is te beschouwen als carbodiïmid: $HN=C=NH$. Vele onderzoekingen †) mogen daarvan mede het gevolg zijn geweest, en de uitkomst was, dat sommige scheikundigen dit lichaam bleven beschouwen als in werkelijkheid te zijn cyanamid: $N\equiv C-NH_2$, of anders gezegd *het amid van normaal cyaanzuur:* $N\equiv C-OH$, terwijl het beschouwd als carbodiïmid: $HN=C=NH$ niet alleen kan worden afgeleid van: $O=C=O$, maar noodwendig even goed kan geheeten worden een afgeleide van gewoon of isocyaanzuur: $O=C=NH$ (zie later).

Zonder te vervallen in herhaling, wenschte ik deze hoogst gewichtige zaak nogmaals te behandelen. Kennis aangaande de structuur van eenvoudig samengestelde stoffen, als een cyaanzuur, cyanamid, enz., ligt noodwendig ten grondslag aan die van meer samengestelde lichamen. Daarbij komt, dat ook uit een scheikundig-physiologisch oogpunt cyaanzuur, cyanamid en analogen van groote beteekenis zijn.

Verreweg het meerendeel der feiten betreffende cyanamid kunnen zoowel worden verklaard door middel der formule $N\equiv C-NH_2$ als door die van $HN=C=NH$. Dit neemt

---

*) *Dt. Chem. Ges.* 6. 655; 7. 1233, 1634

†) Zie BAUMANN, *Dt. chem. Ges.* 6, 1370; 7, 100; DRECHSEL, *J. f. pr. Ch. N. F.* 8, 327; 21, 80; SCHIFF, *Dt. chem Ges.* 10, 425; WEITH, *Dt. chem. Ges.* 6, 1398; 7, 10, 840, 1303; zie verder BEILSTEIN en GEUTHER, *Ann. Ch. Ph.* 108, 96. Daarenboven het: *Neues Handwörterbuch der Chemie* von Dr. H. V. FEHLING, Art. Cyanamid.

evenwel niet weg, dat de verklaring van sommige reacties minder gedrongen is met de laatste dan met de eerste dezer formules of omgekeerd. Doorloopen we eenige hoofdfeiten.

Bij verhitting van sommige zouten van isocyaanzuur kan ontstaan zoogenaamd cyanamid, welke reactie aanleiding schijnt te moeten geven om dit lichaam te beschouwen als carbodiïmid:

$$\left.\begin{matrix} O=C=NH \\ O=C=NH. \end{matrix}\right\} = CO_2 + HN=C=NH$$

Koolstofdioxyde kan met $NH_2.Na$ geven cyanamid:

a. $O=C=O + NH_2.Na = H_2O + O=C=N.Na$

b. $O=C=N.Na + NH_2.Na = H_2O + Na.N=C=N.Na.$

Om aan te nemen, dat isocyaanzuur hierbij wordt omgezet in normaal cyaanzuur, schijnt wel wat gedrongen (zie later).

De vorming van zoogenaamd cyanamid door oxydatie van zwavelureum kan door beide formules op voldoende wijze worden verklaard.

Cyanamid werd, zooals bekend, het eerst in onzuiveren staat verkregen door Bineau bij inwerking van chloorcyaan op ammoniak, terwijl Cloëz en Cannizzaro het aldus maakten in vrij zuiveren toestand. In plaats van chloorcyaan kan broomcyaan worden genomen. Deze bereidingswijzen zouden noodwendig aanleiding geven tot een aannemen der formule: $N\equiv C-NH_2$, maar behalve gemeld bezwaar, zijn daartegen nog vele andere bedenkingen aan te voeren. Zoo kan b.v. zoogenaamd cyanamid verhit worden tot ongeveer 150°, alvorens te worden veranderd, en zou het dadelijk gepolymeriseerd worden, zonder aanvankelijk te vormen het zeker meer stabiele carbodiïmid: $HN=C=NH$, en evenmin schijnt dicyaandiamid bij verhitting in een metamere verbinding over te gaan. En toch gaat b.v. normaal cyanuurzuurmethyl bij verhitting over in isocyanuurzuurmethyl (zie vroeger).

Tegenover potassaloog is zoogenaamd cyanamid zeer stabiel, dat men zou meenen minder te mogen verwachten van een

amid. Het amid zou een afgeleide zijn van een zuur, dat te weinig karakter bezit om zelfstandig te kunnen optreden, namelijk normaal cyaanzuur: $N \equiv C-O-H$; een zuur, waarvan zelfs het kaliumzout niet schijnt te kunnen bestaan, terwijl de alkylverbinding betrekkelijk weinig stabiliteit vertoont, en reeds bij 110^0—120^0, naar 't voorkomt, wordt ontleed.

Toch is een amid in den regel stabieler dan zijn overeenkomstige alkoxyl-verbinding, zoo: $NH_2—CO_2OC_2H_5$ stabieler dan $NH_2—CO—NH_2$.

De vorming van NH_3 en $NH_2.CH_3$ bij inwerking van waterstof in statu nascenti op cyanamid, laat zich even goed verklaren door beide formules. Deze reactie kon evenwel in zooverre pleiten voor de formule $HN=C=NH$, (een afgeleide van $O=C=NH$) als is aangetoond, dat waterstof in statu nascenti, isocyaanzuur $O=C=NH$ omzet in: $H—CO—NH_2$ (formamid), dat betrekkelijk gemakkelijk aldus wordt ontleed:

$$H—CO—NH_2 = H_2O + N \equiv C—H,$$

hoeveel te eerder zal dan $HN=C=NH$ kunnen vormen NCH. Het ontstaan van NCH bij oxydatie van cyanamid, is te verklaren, uitgaande van de formule $HN=C=NH$, door het aannemen eener verschuiving van een atoom waterstof van N naar C. Waterstof nu verhuist zeer gemakkelijk, terwijl daarenboven uit de vorming van gewone nitrilen en carbylaminen door cyaniden, genoegzaam blijkt, dat cyaanwaterstof (aangenomen, dat het is $N \equiv C—H$, zooals uit vele addities schijnt te blijken) al zeer gemakkelijk kan overgaan in $=C=NH$, en dus ook omgekeerd $HN=C=NH$ zal kunnen geven $N \equiv C—H$. Maar, kan men zeggen (en nu komt het hoofdargument voor de formule $N \equiv C-NH_2$) bij inwerking van C_2H_5I op zilvercyanamid zou ontstaan een diaethylcyamid, dat met zoutzuur zou geven: NH_3, CO_2 en $NH_2.C_2H_5$. Waren er geen feiten bekend, die ons leerden, hoe gemakkelijk hierbij verschuiving van een C_2H_5 kan

intreden, dan was de zaak uitgemaakt; thans is dit niet het geval, zooals tevens kan blijken uit het volgende. Alle scheikundigen beschouwen te recht cyaankalium als $N \equiv C - K$; zoo geeft dit laatste bijv. met $CH_2Cl.CO.OH$ een $CH_2.CN.CO.OH$ en dit bij verzeeping: $HO.CO.CH_2.CO.OH$. Maar wordt cyaankalium beschouwd als $N \equiv C—K$, dan is aan cyaanammonium wel moeilijk anders dan de volgende formule te geven: $N \equiv C—NH_4$. Geeft men derhalve aan zoogenaamd cyanamid de formule: $N \equiv C - NH_2$, dan heeft men tusschen;

cyaanammonium: $N \equiv C - NH_4$
cyaanamid: $N \equiv C - NH_2$

slechts een verschil van 2 H, en overigens een overeenkomstige structuur; in cyaanammonium treedt de stikstof op met al hare valenties, daarentegen in cyanamid als trivalent. Nu heb ik vroeger aangetoond, dat cyaanammonium door chloor niet overgaat in cyanamid, onder omstandigheden, waardoor gevormd cyanamid door chloor niet wordt aangetast (maar dat er ontstaan gekleurde condensatieprodukten). Hoe geheel anders verhoudt zich b. v. chloor tegenover $Cl—NH_4$.

Ten slotte pleit wellicht voor de formule $HN=C=NH$, dat het mij niet is mogen gelukken het ruwe product (versch) der inwerking van broomcyaan en $C_2H_5.ONa$, waarin toch waarschijnlijk aethylnormaalcyanaat: $N \equiv C — OC_2H_5$ voorkomt, na oplossen in aether (watervrij) met ammoniakgas om te zetten in cyanamid of een lichaam daarmede polymeer.

In 't algemeen schijnen dan ook de eigenschappen van isocyaanzuur te staan tot die van cyanamid, als b, v. die van ureum tot guanidine:

$$O=C=NH \qquad HN=C=NH$$
$$H_2N—C—NH_2 \qquad H_2N—C—NH_2$$
$$\| \qquad\qquad \|$$
$$O \qquad\qquad NH.$$

Zoo kan b. v. isocyaanzuur door ammoniak overgaan in cyanamid (zie vroeger), en guanidine door verlies van NH_3 (onder opname van H_2O) worden omgezet in ureum, terwijl er veel overeenkomst bestaat in de wijze, waarop isocyaanzuur en cyanamid polymeriseeren.

Utrecht, 24 December 1880.

RAPPORT

OP DE VERHANDELING VAN

Dr. H. KAMERLINGH ONNES,

GETITELD:

„ALGEMEENE THEORIE DER VLOEISTOFFEN".

AAN DE AKADEMIE AANGEBODEN IN HARE VERGADERING VAN 24 DECEMBER 1880.

Deze verhandeling is geschreven met het doel om aan te toonen, dat de algemeene vloeistofwet, welke aan de Akademie is medegedeeld in hare vergaderingen van Sept. en Nov. j. l., afgeleid kan worden uit de onderstelling, dat de molekulen der verschillende stoffen *gelijkvormige* elastische lichamen van niet merkbaar veranderende afmetingen zijn.

De verhandeling bevat vier paragrafen, waarvan wij den inhoud kort zullen mededeelen.

In de eerste paragraaf wordt de vergelijking der isotherme afgeleid. Om tot deze vergelijking te geraken, is het noodig in aanmerking te nemen, dat de molekulen aantrekkende krachten op elkander uitoefenen en dat zij uitgebreidheid hebben. De invloed der laatste omstandigheid kan op tweeërlei wijze in rekening gebracht worden: òf door na te gaan, in hoever, ten gevolge dezer uitgebreidheid, het aantal botsingen vergroot wordt, òf door naast het aantrekkende *viriaal* ook dat der afstootende krachten bij de botsing te beschouwen. De schrijver volgt de eerste wijze van berekening en komt daardoor tot de invoering in de vergelijking der isotherme van een functie van het volume der molekulen

en van de door het aggregaat ingenomen ruimte, welke functie hij *botsingsfunctie* noemt. Van deze functie wordt bewezen, dat zij slechts kan afhangen van de verhouding tusschen de twee in haar voorkomende grootheden, en dat zij slechts door grootheden van de tweede of hoogere orde van de eenheid verschillen kan. Verwaarloost men deze grootheden van de tweede of hoogere orde, dan wordt de isotherme volkomen gelijk aan die, welke door VAN DER WAALS is gegeven als slechts geldende voor volumes, welke grooter zijn dan 8-maal het volume der molekulen. Deze botsingsfunctie wordt ook door den schrijver niet nader bepaald, maar moet, ten minste bij gelijkvormige molekulen, voor alle stoffen als gelijk worden aangemerkt.

In de tweede paragraaf, inhoudende: »Opmerkingen over den algemeenen vorm der isotherme," handelt de schrijver o. a. over de keus der verschillende eenheden voor de in aanmerking komende grootheden, en over de gewichtshoeveelheid stof, welke in het volume aanwezig zal worden gedacht. Voor deze laatste hoeveelheid kiest hij de gewichtseenheid maal het molekulair-gewicht. Deze keus verdient navolging. Dan toch worden voor de verschillende stoffen evenveel molekulen in beschouwing genomen. Reeds de wet van AVOGADRO is een vingerwijzing, dat dan de eenvoudigste wetten voor de grootte van het volume zullen te wachten zijn — en inderdaad heeft de besproken vloeistofwet geleerd, dat, in *overeenstemmende* omstandigheden van temperatuur en druk, de volumm-grootte dan evenredig is aan de molekuulgrootte; terwijl volgens de wet van AVOGADRO, onder *gelijke* omstandigheden van temperatuur en druk, het volume dan ten minste bij benadering even groot is.

In de derde paragraaf worden uit den aangenomen vorm der isotherme de kritische grootheden bepaald, door het kenmerk toe te passen, dat voor de kritische isotherme in het kritisch punt zoowel $\frac{dp}{dv}$ als $\frac{d^2p}{dv^2}$ gelijk nul moet zijn; en door invoering van de waarde dezer grootheden in de vergelijking der isotherme wordt de algemeene vloeistofwet verkregen.

Eindelijk wordt in de vierde paragraaf op vernuftige wijze gebruik gemaakt van het beginsel van de gelijkvormigheid in de beweging om een nieuw bewijs voor deze vloeistofwet te leveren.

Wij meenen dus de Akademie te mogen adviseeren, deze verhandeling op te nemen in hare werken. Enkele opmerkingen omtrent ondergeschikte punten, van te geringe beteekenis om in dit verslag te worden vermeld, kunnen door de Commissie ter kennis gebracht worden van den schrijver, wien de vrijheid kan worden gelaten, daarvan al dan niet gebruik te maken.

De Commissie:

Januari 1881.

J. D. v. d. Waals.
J. Bosscha.
C. H. C. Grinwis.

DE OVERGANG DER ENERGIE BIJ DE BOTSING VAN LICHAMEN

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

De verschijnselen der botsing van vaste lichamen, die steeds aanleiding gaven tot gewichtige onderzoekingen van verschillende wis- en natuurkundigen, en niet weinig tot de kennis van de grondbeginselen der mechanica hebben bijgedragen, schijnen het meest geschikte uitgangspunt voor eene studie van de leer der energie.

Het blijkt, dat die verschijnselen, uit dat oogpunt beschouwd. eveneens tot meer theoretische onderzoekingen aanleiding geven.

Wij stellen ons voor. dit onderwerp thans gedeeltelijk te behandelen, en zullen in het volgende vooreerst de uitdrukkingen voor snelheid en energie afleiden, en kortelijk haar gebruik met het oog op ons onderwerp bespreken. Daarna willen wij nagaan, hoe zich de kinetische energie bij de botsing verdeelt, om dan meer opzettelijk bij den overgang van energie, die gedurende de botsing van het eene lichaam op het andere plaats heeft, stil te staan.

A. Afleiding der uitdrukkingen voor snelheid en energie.

1. In het volgende zal voornamelijk gehandeld worden over de *rechte* botsing van vaste lichamen; dit eenvoudig hoofdgeval laat toch eene meer heldere uiteenzetting van het

samengestelde proces der botsingverschijnselen toe. Voor het geval der *scheeve* botsing volgt eene afzonderlijke behandeling, ten einde de resultaten, waartoe wij geraken, in meer algemeenen vorm te kunnen aangeven.

De vorm der botsende massa's wordt niet vastgesteld; men kan dezen bij het volgende willekeurig aannemen, mits de lichamen zich zóó bewegen, dat aan de voorwaarden der rechte botsing wordt voldaan, waarbij een normale stoot plaats vindt volgens de lijn, die de zwaartepunten der beide massa's verbindt.

Eenvoudigheidshalve onderstellen wij, dat de lichamen aanvankelijk slechts eene voortgaande beweging bezitten, en sluiten dus eene draaiende beweging vóór de botsing uit.

De massa's hebben aanvankelijk gegevene snelheden, met hetzelfde teeken, zoo zij in dezelfde richting zijn.

Aantrekkende of afstootende krachten, tusschen beide lichamen werkzaam, laten wij, als gewoonlijk, buiten rekening, daar gedurende den korten tijd der botsing haar invloed uiterst gering is. Nemen wij verder aan, dat de stoot niet zoo hevig is, dat daardoor een merkbaar blijvenden indruk in een der lichamen wordt voortgebracht, zoo kunnen wij de door NEWTON gevondene wet vooropstellen, volgens welke de betrekkelijke snelheid, waarmede de beide lichamen na de botsing uiteengaan, zich tot die, waarmede zij vóór de botsing elkander naderen, in eene voor dezelfde lichamen standvastige verhouding staat.

Behalve door NEWTON zelven, is die wet door HODGKINSON *) in eene groote reeks van waarnemingen onderzocht en juist bevonden. Die verhouding is echter niet altijd constant; zij vermindert bij groote snelheden. Wij zullen deze verhouding door e voorstellen. Zij werd, naar aanleiding van NEWTON's woorden, minder juist »elasticiteits-coëfficiënt" geheeten. Zooals thans gebruikelijk wordt, willen wij haar »restitutie-coëfficiënt" noemen.

Voor volkomen veerkrachtige lichamen is zij de eenheid,

*) *Report of the British Association for* 1834.

voor geheel onveerkrachtige nul; die coëfficiënt is dus in het algemeen een gebroken, dat voor meerdere lichamen bepaald is en hoewel de coëfficiënt met de veerkracht in verband schijnt, drukt zij thans voor ons slechts het eigenaardig gedrag der lichamen gedurende de botsing uit.

Duiden wij dan door v, v' en V, V' de snelheden der lichamen vóór en na de botsing aan, zoo behoeven wij slechts twee vergelijkingen ter bepaling der laatste grootheden:

1° de vergelijking, die uitdrukt, dat de som der bewegingsmomenten constant blijft,

2° de wet van NEWTON.

Derhalve

$$mV + m'V' = mv + m'v' \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$V' - V = e(v - v') \ldots\ldots\ldots (2)$$

Noemen wij de verhouding der massa's p, die der snelheden vóór de botsing q, zoodat

$$m' = pm, \quad v' = qv;$$

stellen wij ter bekorting,

$$1 + pq = \delta \text{ en } 1 - q = f,$$

zoo worden bovenstaande vergelijkingen,

$$V + pV' = \delta v$$

$$V' - V = efv,$$

waaruit,

$$V = \frac{\delta - epf}{1 + p} v \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$V' = \frac{\delta + ef}{1 + p} v \ldots\ldots\ldots (4).$$

Merken wij als bijzondere gevallen op:

1°. Als de massa's gelijk zijn, $p = 1$, $\delta = 1 + q = \delta'$

$$V = \frac{\delta' - ef}{2} v, \quad V' = \frac{\delta' + ef}{2} v$$

dus $V + V' = \delta' v = (1 + q) v = v + v'$, wat ook e zij.

2°. **Als het tweede lichaam aanvankelijk in rust is, derhalve**

$$q=0,\quad \delta=1,\quad f=1,\quad V=\frac{1-ep}{1+p}v,\quad V'=\frac{1+e}{1+p}v.$$

3°. **Als beide voorwaarden gelijktijdig vervuld zijn,**

$$p=1 \text{ en } q=0,\quad V=\frac{1-e}{2}v,\quad V'=\frac{1+e}{2}v$$

zoodat $V+V'=v$, wat ook e.

4°. Als het tweede lichaam zich in tegengestelden zin beweegt, wordt q negatief, gelijk $-q_1$, $\delta=1-pq_1$, $f=1+q_1$.

Deze laatste opmerkingen, hoe allereenvoudigst ook, meenden wij, daar zij algemeen zijn, niet achterwege te moeten laten.

Andere gevolgen zullen wij te gelijk met twee vraagstukken omtrent energie bespreken, wanneer de formules voor de kinetische energiën der beide lichamen na de botsing gegeven zijn.

2. De door NEWTON proefondervindelijk gevondene wet geeft, bij invoering der snelheid u van het zwaartepunt der beide massa's, eene belangrijke betrekking tusschen de snelheden vóór en na de botsing.

Daar

$$u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}=\frac{1+pq}{1+p}v=\frac{\delta}{1+p}v$$

en dus

$$(1+p)u=\delta v$$

volgt uit (1) en (2)

$$V+pV'=\delta v=(1+p)u$$
$$V'-V=efv$$

dus

$$(1+p)V=(1+p)u-epfv \quad \ldots\ldots (5)$$
$$(1+p)V'=(1+p)u+efv \quad \ldots\ldots (6).$$

(5) geeft

$$u-V=\frac{epfv}{1+p}=e\frac{pv-pqv}{1+p}=e\frac{(1+p)v-(1+pq)v}{1+p}=e(v-u),$$

evenzoo volgt uit (6),

$$V' - u = \frac{efv}{1+p} = e\frac{v-v'}{1+p} = e\,\frac{v+pv'-v'-pv'}{1+p} = e\,(u-v')$$

dus

$$u - V = e(v-u) \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$V' - u = e(u-v') \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Na de botsing zijn derhalve de betrekkelijke snelheden der beide lichamen ten opzichte van het zwaartepunt in richting omgekeerd en in reden van $1 : e$ verminderd; dus daar $e =$ of < 1, in het algemeen kleiner geworden.

Voor $e = 0$ verdwijnt de betrekkelijke snelheid ten opzichte vaa het zwaartepunt na de botsing en wordt

$$V = u = V'.$$

3. Uit de waarden (3) en (4) voor V en V', volgt terstond, als $\alpha = \frac{mv^2}{2}$ en $\alpha' = \frac{m'v'^2}{2}$, $\beta = \frac{mV^2}{2}$ en $\beta' = \frac{m'V'^2}{2}$ de energiën der beide massa's vóór en na de botsing aanduiden,

$$\beta = \left(\frac{\delta - epf}{1+p}\right)^2 \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\beta' = \left(\frac{\delta + ef}{1+p}\right)^2 p\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

De energiën der beide lichamen zijn dus door middel der aanvankelijke energie α van het eerst aangenomen lichaam uitgedrukt.

Zoo noodig kan in (10) α door $\frac{\alpha'}{pq^2}$ worden vervangen; β' gaat dan over in

$$\beta' = \left(\frac{\delta + ef}{\delta - f}\right)^2 \alpha' \quad \ldots\ldots\ldots (10_a).$$

De zeer eenvoudige uitdrukkingen (9) en (10) zullen wij steeds, als de meest doelmatige, gebruiken. Zij geven eene regelmatige en spoedige oplossing van de vraagstukken der botsing,

daar ook, blijkens het vorige, de factoren van α en $p\alpha$ de waarden $\frac{V^2}{v^2}$ en $\frac{V'^2}{v^2}$ voorstellen.

4. Enkele vraagstukken mogen de bruikbaarheid der bedoelde formules toelichten.

1e. *De voorwaarde, dat het eerste lichaam na botsing tot rust komt.*

Form. (9) geeft $\delta = epf$ of $1 + pq = ep(1 - q)$.

Als bijzondere gevallen merken wij op:

a. Zoo het tweede lichaam aanvankelijk in rust is, dus $q = 0$, zal $e = \frac{1}{p} = \frac{m}{m'}$, moeten zijn.

b. Bij gelijke massa's $p = 1$, moet $q = -\frac{1-e}{1+e}$, of bij volkomen veerkrachtige lichamen $q = 0$.

c. Bij gelijke, doch tegengestelde snelheden of $q = -1$, moet $p = \frac{1}{1+2e}$ of bij volkomen veerkrachtige lichamen $p = \frac{1}{3}$ d. i. $m' = \frac{1}{3}m$.

d. Zijn de bewegingsmomenten tegengesteld gelijk, of $\delta = 0$ zoo moet $e = 0$; de massa's onveerkrachtig.

De onderstelling $q = -1$ maakt $V' = 0$ (het tweede lichaam na botsing in rust) of $\delta + ef = 0$ als $p = 1 + 2e$; bij volkomen veerkrachtige lichamen $p = 3$, d. i. $m' = 3m$.

2e. *De voorwaarde, dat twee botsende lichamen van snelheid wisselen.*

$$\begin{aligned} \delta - epf &= q(1+p) & \delta + ef &= 1 + p, \\ 1 - epf &= q & pq + ef &= p, \\ epf &= f & ef &= pf, \\ V = v' \text{ eischt } & ep = 1, & V' = v \text{ vordert } & e = p. \end{aligned}$$

Voor wisseling der snelheden is dus noodig:

$$e = p = 1,$$

d. i. de lichamen moeten gelijke massa's hebben en volkomen veerkrachtig zijn.

3°. *Het verlies aan kinetische energie van voortgaande beweging bij de botsing.*

Noemen wij de som der kinetische energiën vóór de botsing W en daarna w, zoo is

$$W = (1 + pq^2)\alpha \qquad w = \beta + \beta' = \frac{\delta^2 + e^2 p f^2}{1 + p}\alpha$$

zoodat het verlies U aan kinetische energie bij de botsing uitgedrukt wordt door de vergelijking

$$U = W - w = (1 - e^2)\frac{pf^2}{1+p}\alpha .$$

Dit verlies verdwijnt dus bij volmaakt veerkrachtige lichamen, wanneer $e = 1$; het is het grootst bij onveerkrachtige, waar $e = 0$; dan zal

$$U_0 = \frac{pf^2}{1+p}\alpha = \frac{p^2f^2+pf^2}{(1+p)^2}\alpha = \frac{(1+p-\delta)^2+p(\delta-q(1+p))^2}{(1+p)^2}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}m(v-u)^2 + \frac{1}{2}m'(u-v')^2$$

d. i. het verlies is gelijk de som van de halve levende krachten der verlorene en gewonnen snelheden. Het bekende beginsel van CARNOT.

4°. *De voorwaarde, dat de totale kinetische energie na botsing* $\frac{1}{n}$ *der aanvankelijke energie zij.*

$$W = nw \quad \text{of} \quad (1 + pq^2)\alpha = n\left(\frac{\delta^2 + e^2 p f^2}{1+p}\right)\alpha$$

$$n\delta^2 + e^2 n p f^2 = (1+p)(1+pq^2)$$

$$e^2 = \frac{(1+p-n)+(q-2n)pq+(1-n)p^2q^2}{np(1-q)^2}$$

zal $n = 1$, dus geen verlies plaats hebben, zoo moet $e = 1$.

Is het tweede lichaam aanvankelijk in rust, zoo wordt $q = 0$ en

$$e^2 = \frac{1 + p - n}{np} = \frac{m + m' - nm}{nm'};$$

als bovendien de massa's gelijk zijn, dus $p = 1$, wordt

$$e^2 = \frac{2 - n}{n},$$

zoodat steeds $n < 2$; dat is, wanneer eene willekeurige massa tegen eene even groote stilstaande massa botst, gaat nooit meer dan de helft der aanvankelijke kinetische energie der voortgaande beweging in anderen energievorm over.

B. VERDEELING DER KINETISCHE ENERGIE BIJ DE BOTSING.

5. Met het oog op de te geven ontwikkeling, moge nog eene tweede afleiding der formules (9) en (10) volgen.

Als weder u de snelheid van het zwaartepunt der botsende massa's aanduidt, v, v', V, V' de snelheden vóór en na de botsing voorstellen, heeft men

$$v \text{ of } u + (v - u) \quad \text{en} \quad v' \text{ of } u - (u - v')$$
$$V \text{ » } u + (V - u) \text{ » } V' \text{ » } u - (u - V');$$

zoodat, daar volgens NEWTON (Vergel. N°. 2)

$$V - u = e(u - v) \quad \text{en} \quad u - V' = e(v' - u),$$

de snelheden na botsing worden

$$u - e(v - u) \qquad u + e(u - v').$$

Derhalve zullen de aanvankelijke energiën

$$(u + (v - u))^2 \frac{m}{2} \qquad (u - (u - v'))^2 \frac{m'}{2}$$

of $\alpha = \left(\frac{\delta + pf}{1+p}\right)^2 \alpha \qquad \alpha' = \left(\frac{\delta - f}{1+p}\right)^2 p\alpha$

overgaan in

$$(u - e(v-u))^2 \frac{m}{2} \qquad (u + e(u-v'))^2 \frac{m'}{2},$$

of wel in

$$\beta = \left(\frac{\delta - epf}{1+p}\right)^2 \alpha \qquad \beta' = \left(\frac{\delta + ef}{1+p}\right)^2 p\alpha.$$

Blijkbaar verschilt deze afleiding daardoor van de vorige, dat bij de eerste bepaling de onveranderlijkheid der hoeveelheden van beweging vóór en na de botsing werd gebezigd, bij deze de snelheid van het zwaartepunt der botsende lichamen is ingevoerd.

6. Wanneer wij de uitdrukkingen α, α' en β, β' ontwikkelen en ons eenvoudig tot de tellers bepalen, zien wij, dat bij de botsing de vormen,

(I) $\delta^2 + 2pf\delta + p^2f^2 \qquad p\delta^2 - 2pf\delta + pf^2$ (I')

overgaan in

(II) $\delta^2 - 2epf\delta + e^2p^2f^2 \qquad p\delta^2 + 2epf\delta + e^2pf^2$ (II')

In elk dezer vormen behoort, blijkens het in N°. 5 ontwikkelde, de laatste term tot de betrekkelijke energie ten opzichte van het zwaartepunt; de beide eerste termen behooren tot, wat men zou kunnen noemen, de energie van het zwaartepunt; dat is, de kinetische energie der beide massa's, in het zwaartepunt vereenigd gedacht.

Die energie van het zwaartepunt is, volgens bovenstaande formules dezelfde vóór en na de botsing, zooals de eenparige beweging van het zwaartepunt medebrengt en wel is dit gedeelte der energie:

$$\frac{\delta^2}{1+p}\alpha \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Wij komen later op deze uitdrukking en de verdeeling

dier energie over de beide lichamen vóór en na de botsing meer uitvoerig terug.

Wat de betrekkelijke energie betreft, zij heeft vóór en na de botsing de totale waarden:

vóór:

$$\frac{p^2f^2 + pf^2}{(1+p)^2}\alpha = \frac{pf^2}{1+p}\alpha \ldots\ldots (12)$$

na:

$$\frac{e^2p^2f^2 + e^2pf^2}{(1+p)^2}\alpha = \frac{e^2pf^2}{1+p}\alpha; \ldots\ldots (13)$$

zij is dus gedurende de botsing, blijkbaar ten gevolge van de zamendrukking der botsende lichamen, verminderd met de hoeveelheid

$$U = (1-e^2)\frac{pf^2}{1+p}\alpha \ldots\ldots\ldots (14).$$

Hoe uit deze vergelijking het bekende begingsel van CARNOT volgt, zagen wij boven (N°. 4, 3e vraagstuk).

Het verlies bedraagt voor elk der lichamen afzonderlijk genomen,

$$T = (1-e^2)\frac{p^2f^2}{(1+p)^2}\alpha \ldots\ldots\ldots (15)$$

$$T' = (1-e^2)\frac{pf^2}{(1+p)^2}\alpha \ldots\ldots\ldots (16).$$

Wij moeten ons dus voorstellen, dat gedurende het eerste gedeelte der botsing de betrekkelijke energiën

$$\frac{p^2f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{pf^2}{(1+p)^2}\alpha \ldots\ldots (17)$$

als kinetische energie van de voortgaande beweging der botsende lichamen verdwijnt. In het tweede gedeelte der botsing treden de hoeveelheden

$$e^2\frac{p^2f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad e^2\frac{pf^2}{(1+p)^2}\alpha, \ldots\ldots (18)$$

derhalve een gedeelte der hoeveelheden (17) weder als kinetische energie der betrekkelijke beweging op. Bij volkomen veerkrachtige lichamen heeft die terugkeer tot den kinetischen vorm *volledig* plaats, doch een verdwijnen en daarna weder optreden der kinetische energie geschiedt altijd, in verband met de tijdelijke, zij het ook geringe vormverandering der onveerkrachtige lichamen.

Bij onveerkrachtige lichamen blijft de terugkeer tot den kinetischen vorm *geheel achterwege.* In het algemeen wordt een, dikwijls aanmerkelijk, deel door de grootte van den coëfficiënt e^2 aangewezen, tot kinetische energie, tot voortgaande beweging (wel te onderscheiden van inwendige trilling) teruggebracht.

Voor ijzer (staal) is $e = \frac{5}{9}$, voor ivoor $\frac{8}{9}$, voor glas $\frac{15}{16}$, dus zal voor

ijzer 0,31, ivoor 0,78, glas 0,88

der aanvankelijke energie na de botsing in denzelfden kinetischen vorm aanwezig zijn en gaat derhalve bij

ijzer 0,69, ivoor 0,22, glas 0,12

tot anderen energievorm over, welken wij echter in dit opstel niet nader zullen onderzoeken.

Het niet teruggekeerde gedeelte der betrekkelijke kinetische energie door (14) geheel, door (15) en (16) gedeeltelijk aangegeven, wordt gewoonlijk minder juist *verloren* energie genoemd.

7. Wij merkten boven op, dat de zoogenaamde kinetische energie van het zwaartepunt, die vóór en na de botsing eene standvastige waarde behoudt, door de uitdrukking (13) wordt aangeduid. Het blijkt echter uit de in N°. 6 gegevene vormen, dat die energie vóór en na de botsing anders over de beide lichamen verdeeld wordt, en wel bevatten de lichamen, ieder afzonderlijk beschouwd, de volgende hoeveelheden dier energie:

vóór:

$$\frac{\delta^2 + 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\delta^2 - 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \ldots\ldots (19)$$

na:

$$\frac{\delta^2 - 2epf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\delta^2 + 2epf\delta}{(1+p)^2}\alpha ; \ldots\ldots (20)$$

dus is in het eerste lichaam die kinetische energie *verminderd* met

$$2(1+e)\frac{pf\delta}{(1+p)^2}\alpha$$

in het tweede lichaam is zij evenveel *vermeerderd.*

Blijkbaar hebben wij hier met eenen *overgang*, een *transport* der energie van het eerste lichaam naar het tweede te doen, waarbij de grootte der overgedragene energie

$$C = 2(1+e)\frac{pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \ldots\ldots\ldots (21)$$

of voor p, f, δ, α hunne waarden schrijvende,

$$C = (1+e)\frac{mm'(mv + m'v')(v - v')}{(m+m')^2}. \ldots (22)$$

C. De overgang van energie bij de botsing.

8. Op geheel andere wijze laat zich de overgang der energie van het eene lichaam op het andere bepalen, waarbij dit verschijnsel tevens eigenaardig wordt toegelicht.

Verdeelen wij, als gewoonlijk, het geheele verloop der botsing in twee deelen, zoo zal op het einde van het eerste deel, wanneer de betrekkelijke kinetische energie ten opzichte van het zwaartepunt als zoodanig verdwenen is, eene totale kinetische energie, vergel. form. (11), $\frac{\delta^2}{1+p}\alpha$ overblijven.

Deze is (N°. 6 I en I') als volgt over beide lichamen verdeeld:

$$\frac{\delta^2 + 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\delta^2 - 2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha. \quad \ldots \quad (23)$$

De beide lichamen vormen op het einde van het eerste deel eene vereenigde massa, die met de snelheid u voortgaat; de beide zamenstellende deelen dier massa, m en m' of m en pm, verhouden zich als $1 : p$. Het laat zich verwachten, dat de aanwezige kinetische energie $\frac{\delta^2}{1+p}\alpha$ zich in die zelfde verhouding over de beide massa's verdeelen zal, zoodat de beide lichamen afzonderlijk bezitten

$$\frac{\delta^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\delta^2}{(1+p)^2}\alpha. \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Vergelijken wij deze waarden met die, in (23) gegeven, zoo blijkt, dat voor die gelijkmatige verdeeling der energie gevorderd wordt, dat van het eerste lichaam de hoeveelheid energie

$$C_1 = \frac{2pf\delta}{(1+p)^2}\alpha$$

naar het tweede overgaat.

Werkelijk stemt dit met de in (21) voor C gevonden waarde overeen; immers, zoo wij daarin $e = 0$ stellen, dus het gedeelte nemen, dat tot het eerste deel der botsing behoort en waartoe zich het transport van energie bij onveerkrachtige lichamen bepaalt, vinden wij juist de boven gegevene waarde C_1. Zoo wordt dan het eene gedeelte van dit energietransport toegelicht en blijkt, dat de kinetische energie zich zoodanig over de beide vereenigde massa's verdeelt, dat de (volume) dichtheid der energie in beide massa's dezelfde is. Het aanwezig zijn der energie onder anderen vorm, afkomstig van de vroeger aanwezige betrekkelijke beweging, heeft dus blijkbaar op deze verdeeling geen invloed, wat zeker merkwaardig is.

Gedurende het tweede deel treden in de beide lichamen de betrekkelijke energiën

$$\frac{e^2 p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{e^2 p f^2}{(1+p)^2}\alpha$$

weder op en worden dus, ook wegens den overgang C_1, de energiën der beide lichamen, (vergel. form. (24)),

$$\frac{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad \frac{p\delta^2 + e^2 p f^2}{(1+p)^2}\alpha, \ldots . \quad (25)$$

correspondeerende met de snelheden:

$$\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}}{1+p}v \quad \text{en} \quad \frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2}}{1+p}v \ldots . \quad (26)$$

Zal de beweging van het zwaartepunt met dezelfde eenparige snelheid

$$u = \frac{mv + m'v'}{m+m'} = \frac{1+pq}{1+p}v = \frac{\delta}{1+p}v \ldots (27)$$

behouden als vóór de botsing, zoo moet dus

$$\frac{\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2}}{1+p}v + p\,\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2}}{1+p}v}{1+p} = u = \frac{\delta}{1+p}v$$

of

$$\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2} + p\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2} = (1+p)\delta,$$

wat, zooals terstond bij de ontwikkeling der wortelvormen blijkt, *niet* het geval is.

Een tweede energietransport kan echter de verhouding der energiën zoodanig regelen, dat aan (27) voldaan wordt. Zij daartoe $\frac{p x^2}{(1+p)^2}\alpha$, waarin x^2 een nog onbekende factor, de van het eerste lichaam naar het tweede overgevoerde

energie, gedurende het tweede deël der botsing; voor de uitdrukkingen (25) volgt dan,

$$\frac{\delta^2 + e^2 p^2 f^2 - p x^2}{(1+p)^2} a \quad \text{en} \quad \frac{\delta^2 + e^2 f^2 + x^2}{(1+p)^2} p a;$$

de snelheden worden

$$\frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2 - p x^2}}{1+p} v \quad \text{en} \quad \frac{\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2 + x^2}}{1+p} v.$$

De vergelijking (27) geeft dan als voorwaarde:

$$\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2 - p x^2} + p\sqrt{\delta^2 + e^2 f^2 + x^2} = (1+p)\delta;$$

waaruit volgt,

$$2\delta\sqrt{\delta^2 + e^2 p^2 f^2 - p x^2} = 2\delta^2 - p x^2$$

of

$$x^2 = 2 e f \delta,$$

zoodat

$$C_2 = \frac{p x^2}{(1+p)^2} a = \frac{2 e p f \delta}{(1+p)^2} a,$$

zijnde juist het nog ontbrekende deel van C (vergel. form. 21).

Dit gedeelte, dat dus door zijn overgang van het eerste lichaam op het tweede het zwaartepunt van het stelsel met dezelfde eenparige snelheid als vóór de botsing doet voortgaan, vormt als het ware de reactie tot het weder optreden der vroeger aanwezige betrekkelijke energie.

Het energietransport C is dus in zijne beide deelen een direct gevolg van de, wegens het plotseling samentreffen der lichamen tijdelijke, misschien ook gedeeltelijk blijvende vervorming. Hierbij verdwijnt de betrekkelijke energie, t. o. van het zwaartepunt, doch wordt weder ten deele hersteld; de overgang van energie is dus van dit verdwijnen en optreden een onmiddellijk en noodwendig gevolg.

Het transport C_1 correspondeert met de samendrukking der

meer of min veerkrachtige lichamen, de overgang $C_2 = e\,C_1$ met het gedeeltelijk terugkeeren tot den vorigen vorm.

Het dus verkregen resultaat, waarbij een beginsel der dynamica dien overgang der energie noodwendig maakt, dringend vordert, geeft, al laat deze uiteenzetting in algemeenheid nog te wenschen over, aan de theorie der energie, zooals die thans behandeld is, een steun, die niet gering te achten is. Het doet tevens de mogelijkheid doorzien en waarschijnlijk worden, de leer der energie tot de hoofdbeginselen der mechanica terug te voeren en daardoor wellicht voor het onderling verband dier beginselen nieuwe uitzichten te openen.

9. Het dus verkregen energietransport laat zich onder verschillende vormen brengen. Wij vonden vooreerst

$$C = 2(1+e)\,\frac{pf\delta}{(1+p)^2}\,\alpha$$

$$= 2(1+e)\,\frac{p(1-q)(1+pq)}{(1+p)^2}\,\alpha \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

en

$$C = (1+e)\,\frac{mm'(mv+m'v')}{(m+m')^2}(v-v'), \quad \ldots \text{(II)}$$

waaruit blijkt, dat C steeds voor volkomen veerkrachtige lichamen tweemaal grooter is dan voor geheel onveerkrachtige.

Ten einde deze laatste uitdrukking doelmatig te herleiden, kunnen wij de (impulsieve) krachten R_1 en R_2 invoeren, die gedurende de beide deelen der botsing op ieder lichaam in tegengestelde richting werken, R_1 en $-R_1$ in het eerste, R_2 en $-R_2$ in het tweede deel der botsing.

Op het einde van het eerste deel zijn de snelheden der beide lichamen gelijk, waardoor de betrekking

$$\frac{mv - R_1}{m} = \frac{m'v' + R_1}{m'},$$

zoodat

$$R_1 = \frac{mm'}{m+m'}(v-v').$$

Aan het einde van het tweede deel, wanneer de lichamen uiteengaan, is

$$V = \frac{mv - (R_1 + R_2)}{m}, \qquad V' = \frac{m'v' + (R_1 + R_2)}{m'};$$

terwijl nu

$$V' - V = e(v - v')$$

en R_1 boven gevonden werd, volgt spoedig $R_2 = eR_1$, zooals te voorzien was.

Dientengevolge gaat (II) over in

$$C = (R_1 + R_2)\frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

of

$$C = (R_1 + R_2)u, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

zoodat

$$C_1 = R_1 u, \qquad C_2 = R_2 u \quad \ldots\ldots \text{(III}_a\text{)}$$

Wanneer wij opmerken, dat

$$a = \frac{v^2 m}{2}, \quad \frac{1 + pq}{1 + p} v = u$$

en

$$\frac{p(1 - q)}{1 + p} v = \frac{1 + p - (1 + pq)}{1 + p} v = v - u,$$

laat zich voor den vorm (I) schrijven

$$C = (1 + e)m(v - u)u, \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

waardoor

$$C_1 = m(v - u)u \quad \text{en} \quad C_2 = em(v - u)u. \ldots \text{(IV}_a\text{)}$$

De vergelijkingen (III$_a$) leiden tot een belangrijk gevolg. Er blijkt toch, dat de overgang van energie bepaald wordt door het product der impulsieve krachten met de snelheid u, waarmede de massa zich tijdens den overgang beweegt.

Deze zeer eenvoudige wet stemt volkomen overeen met

wat langs geheel anderen weg voor de beweging der energie in vaste lichamen gevonden is door UMOW *). — Deze Russische geleerde, die zich echter niet opzettelijk met de botsing bezig hield, hiervan zelfs met geen enkel woord gewaagt, onderzocht de beweging der kinetische energie, bij de onderstelling, dat die energie als eene samendrukbare, veerkrachtige vloeistof beschouwd wordt. Hij vond, dat de energie, die in een bepaalden tijd door de vlakteeenheid van een vast lichaam in de richting der drukkende kracht (Spannkraft) gaat, wordt uitgedrukt door het product dier kracht met de composante volgens de krachtrichting van de snelheid van het zwaartepunt der massa.

In het geval der *rechte* botsing, dat wij thans behandelen, blijkt uit (III_a), dat men werkelijk met een bijzonder geval dier wet te doen heeft en dat dit deel der kinetische energie zich bij de rechte botsing inderdaad als eene samendrukbare, veerkrachtige vloeistof gedraagt, zich althans volgens dezelfde regels beweegt, die bij zoodanige onderstelling gelden. Zulks was zeker niet te voorzien en vorderde een onafhankelijk betoog. De overeenkomst, die onze uitdrukking voor het energietransport in dit geval vertoont, schijnt ons om die reden, ook al zijn wij nog volstrekt niet geneigd de energie als eene vloeistof te beschouwen, een resultaat van beteekenis.

Merken wij ten slotte nog op, dat door ons de kinetische energie berekend is ten opzichte der als stilstaand beschouwde omgeving. De snelheid van het zwaartepunt is, volgens de gewone begrippen der mechanica, bij het afwezig zijn van uitwendige krachten, een direct gevolg van de aangenomene snelheden der beide lichamen en van hunne bekende massa's. Wil men ook de beweging der omgeving, bijvoorbeeld die der aarde of van beslotene ruimten, die zich op haar oppervlak bewegen en waarbinnen die botsing plaats vindt, in rekening brengen, zoo moet ook de aanvankelijke energie der massa's daarnaar gewijzigd worden.

---

*) Ableitung der Bewegungsgleichungen der Energie in continuirlichen Körpern, von NICOLAUS UMOW, Docent an der Universität Odessa. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* XIX. S. 418.

Ter verklaring van de verschijnselen der botsing, kan eene nadere behandeling van dit vraagstuk, dat eigenaardige moeilijkheden heeft, achterwege blijven. Trouwens, zooals bekend, is de bepaling der *absolute* energie, die eenig lichaam bevat, onmogelijk en wordt voor het aangegeven geval allereerst bekendheid met de rol, die de omgeving als drager der energie vervult, en waarschijnlijk meer dan dat, gevorderd. Men moet zich dus, en dit heeft voor de botsing vermoedelijk geen bezwaar, met de kennis der (betrekkelijke) kinetische energie ten opzichte van eene eenmaal aangenomene beweging tevreden stellen.

10. De vormen (I) en (IV) voor C

$$C = 2(1+e)\frac{p(1-q)(1+pq)}{(1+p)^2}\alpha$$

$$C = (1+e)\,m\,(v-u)\,u\,,$$

geven terstond aan, dat C verdwijnt,

1e Als $q = 1$ of $v = u$. Dit geval komt echter niet in aanmerking, daar alsdan geene botsing plaats heeft; de beide massa's bewegen zich in dit geval met gelijke snelheid in dezelfde richting en ontmoeten elkander niet.

2e Als $1 + pq = 0$ of $u = 0$, dat is als het zwaartepunt in rust is of $mv = -m'v'$, zoodat de beide lichamen vóór de botsing gelijke doch tegengestelde bewegingsmomenten bezitten.

In dit merkwaardige geval verdwijnt C_1 (zie N°. 8), daar $\delta = 0$; de lichamen bevatten, daar op het einde van het eerste deel de vereenigde massa in rust is, geene kinetische energie. Eveneens vervalt C_2, daar, bij den stilstand van het zwaartepunt, de noodzakelijkheid voor energietransport, blijkens N°. 8, niet bestaat.

Ondanks dit eigenaardig verdwijnen van C_1, vindt toch, als gewoonlijk, wat ook e, de transformatie der betrekkelijke energie ten opzichte van het zwaartepunt plaats en wel is, daar

$$q = -\frac{1}{p} \text{ dus } \frac{pf}{1+p} = 1 \text{ en } \alpha' = pq^2\alpha = -q\alpha = \frac{\alpha}{p}.$$

en volgens vergelijkingen (15) en (16)

$$T = (1 - e^2)\,\alpha \qquad T' = (1 - e^2)\,\frac{\alpha}{p} = (1 - e^2)\,\alpha' ;$$

alle kinetische energie is hier betrekkelijke energie en bij onveerkrachtige lichamen gaat *alle* bewegingsenergie in anderen vorm over.

De *maximum-waarde* van C volgt onmiddellijk uit (IV).

Bij gegeven aanvankelijke snelheid v wordt toch het tweede lid het grootst als

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{2}v \\ 1 + 2pq - p = 0 \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

of

aan welke voorwaarde dus oneindig vele bijzondere gevallen voldoen; onder anderen voor gelijke massa's als $q = 0$, dat is, bij gelijke massa's heeft het grootste energietransport plaats als de tweede massa in rust is.

In het algemeen volgt de maximum-waarde, die C verkrijgt, terstond uit (IV), die voor $u = \frac{1}{2}v$ geeft

$$C = (1 + e)\frac{m v^2}{4} = \frac{1 + e}{2}\,\alpha,$$

terwijl in dit geval

$$T = \frac{1 - e^2}{4}\,\alpha \qquad T' = \frac{1 - e^2}{4}\,\frac{\alpha}{p}.$$

Bij volmaakt veerkrachtige lichamen gaat *alle* kinetische energie van het eerste lichaam naar het tweede over, bij onveerkrachtige lichamen, wanneer $C = \frac{1}{2}\alpha$ de *helft* dier energie. Verder blijkt, dat de zoogenaamde verlorene kinetische energiën T en T', wat ook e, een *vierde* gedeelte zijn van hun bedrag in geval geen energietransport plaats vindt.

Merken wij eindelijk naar aanleiding van het boven besproken verdwijnen van C op, dat voor $1 + p\,q < 0$, C *negatief* wordt; wanneer derhalve de lichamen zich vóór de botsing in tegengestelden zin bewegen en $m'\,v' > m\,v$, gaat energie van het *tweede* op het *eerste* lichaam over. Met andere woorden, bij *tegengestelde* bewegingsrichting vóór de botsing, gaat steeds energie van het lichaam met het grootste bewegingsmoment op dat met het kleinste over. Bij *gelijke* bewegingsrichting gaat het energietransport altijd van het lichaam uit, dat de grootste snelheid heeft en dat gewoonlijk als het *botsende* lichaam wordt aangeduid.

11. Bespreken wij thans kortelijk de scheeve botsing, zonder wrijving, dus tusschen gladde oppervlakken. Bepalen wij ons in dit geval tot twee *bollen* en nemen wij aan dat de bewegingsrichtingen vóór de botsing hoeken θ en θ', daarna hoeken φ en φ' met de lijn, die de middenpunten verbindt, maken. Daar geene bewegende kracht op de lichamen werkt in eene richting loodrecht op deze lijn, blijven de snelheden volgens die loodlijn onveranderd, zoodat

$$\left.\begin{aligned} V\,\sin\varphi &= v\,\sin\theta \\ V'\sin\varphi' &= v'\sin\theta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Volgende denzelfden weg als in N⁰. 1, zoo zal,

$$\left.\begin{aligned} V\cos\varphi &= \frac{(m\,v\cos\theta + m'v'\cos\theta') - e\,m'(v\cos\theta - v'\cos\theta')}{m + m'} \\ V'\cos\varphi' &= \frac{(m\,v\cos\theta + m'v'\cos\theta') + e\,m\,(v\cos\theta - v'\cos\theta')}{m + m'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (30)$$

Stellen wij

$$\frac{v'\cos\theta'}{v\cos\theta} = q', \qquad 1 + p\,q' = \delta', \qquad 1 - q' = f',$$

zoo volgt uit (30)

$$V\cos\varphi = \frac{(1 + p\,q') - e\,p\,(1 - q')}{1 + p}\,v\cos\theta = \left(\frac{\delta' - e\,p\,f'}{1 + p}\right) v\cos\theta$$

en daar (29) geeft

$$V \sin \varphi = v \sin \theta ,$$

zal

$$V^2 = \left\{ \left(\frac{\delta' - e p f'}{1 + p} \right)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right\} v^2$$

of

$$\beta = \left\{ \left(\frac{\delta' - e p f'}{1 + p} \right)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right\} \alpha, \ldots (31)$$

daar

$$1 + p = 1 + p q' + p - p q' = \delta' + p f' ,$$

wordt

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{\delta' + p f'}{1 + p} \right)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right\} \alpha \ldots . (32)$$

(31) en (32) vergelijkende, volgt (zie N°. 7)

$$C = 2 (1 + e) \frac{p f' \delta'}{(1 + p)^2} \cos^2 \theta . \alpha, \ldots \ldots \ldots \ldots (V)$$

$$= 2 (1 + e) \frac{p (1 - q') (1 + p q')}{(1 + p)^2} \cos^2 \theta . \alpha, \ldots \ldots (V_a)$$

$$= (1 + e) \frac{p (v \cos \theta - v' \cos \theta')}{1 + p} \cdot \frac{(v \cos \theta + p v' \cos \theta')}{1 + p} m . . (V_b)$$

De overdracht der energie is dus gelijk aan de bij de botsing werkzame kracht, vermenigvuldigd met de composante der snelheid van het zwaartepunt, volgens die krachtrichting. Waardoor de regel van Umow (N°. 9) ook bij de scheeve botsing bevestigd wordt.

Ten slotte zij opgemerkt, dat voor dit meer algemeen geval de zoogenaamde verlorene energie (zie N°. 6, form. 14,

15, 16), zoowel voor het geheele stelsel als voor de massa's afzonderlijk, wordt,

$$\left.\begin{aligned} U &= (1-e^2)\frac{p f'^2}{1+p}\cos^2\theta.\alpha \\ &= \frac{(1-e^2)}{2}\frac{m m'}{m+m'}(v\cos\theta - v'\cos\theta')^2 \end{aligned}\right\} \ldots (33)$$

en voor ieder der massa's afzonderlijk

$$T = (1-e^2)\frac{p^2 f'^2}{(1+p)^2}\cos^2\theta.\alpha$$

$$T' = (1-e^2)\frac{p f'^2}{(1+p)^2}\cos^2\theta.\alpha$$

of

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1-e^2}{2}\cdot\frac{m m'^2}{(m+m')^2}(v\cos\theta - v'\cos\theta')^2 \\ T' &= \frac{1-e^2}{2}\cdot\frac{m^2 m'}{(m+m')^2}(v\cos\theta - v'\cos\theta')^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (34)$$

12. Ingevolge het thans behandelde, laten zich de uitdrukkingen voor de kinetische energie der beide lichamen na de botsing dus schrijven:

$$\beta = \alpha - C - T, \qquad \beta' = \alpha' + C - T'; \ldots (35)$$

vervangt men T, T' en C door hunne waarden (15), (16) en (I) van N°. 9 en merkt men op, dat $\alpha' = p q^2 \alpha$, zoo volgen natuurlijk de waarden onder (9) en (10) verkregen.

Is het tweede lichaam aanvankelijk zonder beweging, zoo bedraagt de kinetische energie dier massa na botsing,

$$\beta' = C - T';$$

in dit geval zal, daar $q = 0$,

$$C = 2(1+e)\frac{p}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad T' = (1-e^2)\frac{p}{(1+p)^2}\alpha.$$

Van de overgedragene energie blijft derhalve

$$C - T' = (1 + e)^2 \frac{p}{(1 + p)^2} \alpha \ldots\ldots (36)$$

in energie der voortgaande beweging bestaan; het overige

$$T' = (1 - e^2) \frac{p}{(1 + p)^2} \alpha \ldots\ldots (36_a)$$

gaat in anderen energievorm over.

De verhouding dier beide deelen

$$\frac{C - T'}{T'} = \frac{1 + e}{1 - e} \ldots\ldots\ldots (37)$$

hangt alleen van e af, is zoowel onafhankelijk van de verhouding der massa's als van de aanvankelijke energie van het botsende lichaam.

Voor onveerkrachtige lichamen is

$$C = 2\,T', \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

C verdeelt zich dus in dit geval in twee *gelijke* deelen.

Bij willekeurige lichamen zullen de waarden (36) en (36_a), als α gegeven is, het grootst worden, wanneer $p = 1$, dat is als de massa's gelijk zijn. Hieruit verklaart zich, dat men, bij vele toepassingen der botsingverschijnselen, in geval de tweede massa groot is, de botsende massa ook groot neemt. Daar wij thans niet op een nader onderzoek der zoogenaamde verloren energie kunnen ingaan, moeten wij ons tot deze opmerking bepalen.

Dus zal in het algemeen, als e, p en q willekeurig zijn, zich de energie na de botsing zoodanig verdeelen, dat de massa's ieder in het bijzonder de hoeveelheden

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \alpha - C - T = \left(\frac{\delta - epf}{1 + p}\right)^2 \alpha \\ \text{en} \qquad \beta' &= \alpha' + C - T' = \left(\frac{\delta + ef}{1 + p}\right)^2 p\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (39)$$

kinetische energie van voortgaande beweging,
en de hoeveelheden

$$T=(1-e^2)\frac{p^2f^2}{(1+p)^2}\alpha \quad \text{en} \quad T'=(1-e^2)\frac{pf^2}{(1+p)^2}\alpha \ldots . (40)$$

energie onder anderen vorm bezitten.

13. Beschouwen wij ten slotte, in verband met het behandelde transport van energie, het geval dat meerdere lichamen achtervolgens aan rechte botsing onderworpen worden. — Wij nemen die lichamen eenvoudigheidshalve volkomen veerkrachtig aan, dus $e=1$.

Onderstellen wij, dat het lichaam L het stilstaande lichaam P niet ontmoet, doch tegen een tusschen geplaatst stilstaand lichaam R botst, dat de zoo verkregene energie daarna weder door botsing gedeeltelijk aan P mededeelt.

Zijn dan de massa's der drie lichamen L, R en P,

$$m, \quad rm, \quad pm,$$

α de aanvankelijke energie van L en hunne kinetische energiën na de botsing

$$\beta, \quad (\beta'_1, \beta'_2), \quad \beta''.$$

Is het lichaam R niet aanwezig, zoo volgen na onmiddellijke botsing tusschen L en P, daar $q=0$, de energiën

$$(\beta)=\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^2\alpha, \qquad (\beta'')=\left(\frac{2}{1+p}\right)^2 p\alpha ; \ldots (41)$$

de snelheid van het lichaam P wordt dus,

$$V'=\frac{2}{1+p}v, \ldots \ldots \ldots (42)$$

wanneer v de aanvankelijke snelheid van L.

Bij tusschenplaatsing van het lichaam R krijgt deze massa eene snelheid

$$(V) = \frac{2}{1+r}\, v,$$

terwijl dan de snelheid van P na de botsing wordt,

$$V'' = \frac{2}{1+\frac{p}{r}}(V) = \frac{4}{(1+r)\left(1+\frac{p}{r}\right)}\, v.$$

Deze uitdrukking wordt het grootst, voor verschillende waarden van r, als de noemer het kleinst is, dat is als

$$1 - \frac{p}{r^2} = 0 \qquad \text{of} \qquad r = \sqrt{p}$$

derhalve, wanneer de massa R meetkundig middenevenredig is tusschen L en P.

Dan wordt

$$V'' = \frac{4}{(1+\sqrt{p})^2}\, v \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

Vergelijken wij deze waarde met die zonder het tusschenlichaam R, zoo blijkt, dat

$$\frac{V''}{V} = \frac{2(1+p)}{(1+\sqrt{p})^2} = \frac{2}{1+\frac{2\sqrt{p}}{1+p}} \ldots\ldots (44)$$

en daar, zooals bekend, in het algemeen

$$\frac{2\sqrt{p}}{1+p} < 1 \qquad \text{zal dus} \quad V'' > V,$$

zoodat het lichaam R de eindsnelheid van P *vermeerdert.*

Wanneer $p = 1$, dus L, R en P *gelijke* massa's hebben, zal $V'' = V$, heeft dus het tusschenlichaam geen invloed.

Beschouwen wij, in plaats van de snelheden, de energiën der drie lichamen na de botsingen, zoo vinden wij voor die van:

$$\left.\begin{aligned} L,\ \beta &= \frac{1-2p+p^2}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha = \frac{(1-p)^2}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\ & \qquad\qquad C' = \frac{4\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^2}\alpha \\ R,\ \beta'_2 &= \frac{4\sqrt{p}-8p+4p\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha = \frac{(1-\sqrt{p})^2.4\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\ & \qquad\qquad C'' = \frac{16p}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \\ P,\ \beta'' &= \frac{16p}{(1+\sqrt{p})^4}\alpha \end{aligned}\right\} \ldots (45)$$

C' en C'' duiden de hoeveelheden energie aan, door L aan R en door R aan P overgedragen.

Steeds zal dus

$$\frac{C''}{\alpha} = \left(\frac{C'}{\alpha}\right)^2 \text{ of } (C')^2 = C''\alpha .$$

Voor $p = 1$, gelijke massa's, volgt

$$\beta = \beta'_2 = 0 , \quad \beta'' = \alpha , \quad C' = \alpha , \quad C'' = \alpha .$$

Alle kinetische energie wordt dus naar het derde lichaam overgevoerd. Is $p = \frac{1}{4}$, zoo vindt men

$$\left.\begin{aligned} \beta = \frac{9}{81}\alpha, \quad \beta'_2 = \frac{8}{81}\alpha , \quad \beta'' &= \frac{64}{81}\alpha \\ C' = \frac{72}{81}\alpha = \frac{8}{9}\alpha , \quad C'' &= \frac{64}{81}\alpha \end{aligned}\right\} \ldots (46)$$

Vergelijken wij de energiën van P bij de botsing van *drie* lichamen L, R, P door (45) gegeven met die van *twee* lichamen, L en P, door (41) aangeduid, zoo vinden wij voor hare verhouding, overeenkomstig het in (44) gevondene,

$$\frac{\beta''}{(\beta'')} = \frac{4(1+p)^2}{(1+\sqrt{p})^4} = \left(\frac{2}{1+\frac{2\sqrt{p}}{1+p}}\right)^2 ,$$

welke verhouding steeds kleiner dan één is, tenzij de massa's gelijk zijn.

Voor $p = \frac{1}{4}$ blijkt uit (41) dat, terwijl voor twee lichamen de energie van P was

$$= \frac{16}{25}\,\alpha = 0{,}64\,\alpha$$

de tusschenplaatsing van eene massa, meetkundig middenevenredig tusschen beiden, de energie van P brengt tot (zie 46),

$$\frac{64}{81}\,\alpha = 0{,}97\,\alpha\,.$$

De invloed van het tusschen geplaatste lichaam met de massa $m\sqrt{p}$ heeft eene *dubbele* oorzaak. Daar toch de verhouding der massa van dit tusschenlichaam tot die der uiterste lichamen dichter bij de eenheid gelegen is dan die der uiterste lichamen onderling, zal omdat voor $e = 1$ en $q = 0$,

$$C = \frac{4p}{(1+p)^2}\,\alpha\,,$$

welke vorm voor $p = 1$ de maximumwaarde α verkrijgt, van het lichaam L bij tusschenplaatsing van R, door dit laatste lichaam meer energie worden ontnomen dan wanneer R niet aanwezig is. Verder zal ook door R meer energie aan het laatste lichaam P worden medegedeeld, dan bij dezelfde energie eene aan L gelijke massa zou afgeven. Wel bezit R in het algemeen minder energie dan L, doch de verhouding der massa's werkt ten slotte gunstig op het energietransport. De getalwaarden, uit het voorbeeld in (46) gegeven, kunnen ter toelichting dienen.

Zijn de uiterste massa's, dus de *drie* massa's, even groot, zoo wordt *alle* energie doorgevoerd, evenals bij *twee* gelijke massa's; de tusschenplaatsing kan alsdan, daar reeds alle energie overgaat, geen voordeel geven.

Wat één tusschenlichaam volbrengt, laat zich in nog

hoogere mate van meer $(n-1)$ tusschen gelegene massa's verwachten, die, ingevolge het voorgaande, de eindsnelheid van het laatste lichaam het grootst zullen doen zijn wanneer hunne massa's met L en P eene meetkundige reeks vormen.

Wij vinden bij deze laatste onderstelling voor de snelheid van het $(n+1)^e$ lichaam P, als zijne massa

$$m' = p\,m = r^n\,m$$

of

$$r^n = \frac{m'}{m} = p = \sqrt{r^n} \,.\, \sqrt{\frac{m'}{m}},$$

door herhaalde toepassing der formule (10) van N^0. 3,

$$V_n = \left(\frac{2}{1+r}\right)^n v = \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^n \cdot \left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)^n v = v \cdot \left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)^n \sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

Beschouwen wij deze uitdrukking voor toenemende waarden van n, zoo zal bij de grens, als n oneindig groot, daar $r = \sqrt[n]{p}$ en

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{2\sqrt[2n]{p}}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^n = 1\,,$$

$$V_n = v\sqrt{\frac{m}{m'}} = v\sqrt{\frac{1}{p}}.$$

Dientengevolge wordt de energie der laatste massa P

$$\frac{1}{2} V_n^2\, m' = \frac{1}{2}\, v^2\, \frac{m'}{p} = \frac{v^2 m}{2} = \alpha\,,$$

zoodat in dit niet te verwezenlijken *ideaal* geval *alle* energie van het eerste lichaam op het laatste overgaat.

Zulks blijkt ook door op te merken dat de hoeveelheid, die van L op het volgende lichaam overgaat, welks massa r-maal grooter is, uitgedrukt wordt door

$$C = \frac{4r}{(r+1)^2}\,\alpha$$

en daar $r = \sqrt[n]{p}$ dus $\lim_{n=\infty} r = 1$, wordt $C = \alpha$.

De verhouding der achtervolgende massa's nadert bij toenemend aantal tot gelijkheid, in welk geval volkomen veerkrachtige lichamen, zooals wij thans beschouwen, van alle kinetische energie worden beroofd.

Het bovenstaande moge ook als toelichtiug dienen der bekende botsingsverschijnselen, die zich bij eene reeks opgehangen (ivoren) bollen voordoen, ook voor het geval dat hunne massa's niet gelijk zijn.

Blijkbaar worden wij aldus geleid tot de studie van de voortplanting der kinetische energie in vaste lichamen. Dit onderzoek, dat in zeer nauw verband staat tot den overgang van energie bij de botsing, vordert eene afzonderlijke behandeling.

Utrecht, Januari 1881.

OVER DE KRISTALLISATIE VAN HET DIAMANT.

DOOR

E. H. VON BAUMHAUER.

Ik wensch in deze Vergadering der Afdeeling een voorloopige mededeeling te doen van een onderzoek over de kristallisatie van het diamant, in gemeenschap met ons medelid Professor H. BEHRENS gedaan, en waarover wij later een meer uitvoerige verhandeling voor hare werken in 4^0. hopen aan te bieden.

Zooals bekend is, kristalliseert het diamant in het regulaire systeem. GUSTAAF ROSE, die in de laatste jaren zijns levens zich met de bepaling der kristalvormen van het diamant heeft beziggehouden, en wiens onderzoekingen na zijn dood door A. SADEBECK uit zijn nagelaten papieren in de *Abhandlungen* der Berlijnsche Akademie van 1876 zijn bekend gemaakt, is door de beschouwing van een groote reeks diamanten tot het besluit gekomen dat bij het diamant de zeven holoëdrische vormen: het octaëder, hexaëder, dodecaëder, ikositetraëder, triakisoctaëder, tetrakishexaëder en hexakisoctaëder, en de combinatiën dezer vormen voorkomen, hoewel de ikositetraëdervorm hoogst zelden zelfstandig in de kristalvlakken wordt aangetroffen. Dit kristalliseeren van het diamant in zoo verschillende vormen, terwijl de splijtingsvlakken alleen en uitsluitend tot het octaëder behooren, is voor het diamant zeer eigenaardig; bij geen ander mineraal wordt deze groote verscheidenheid aangetroffen.

Fig. 1.

Fig. 2.

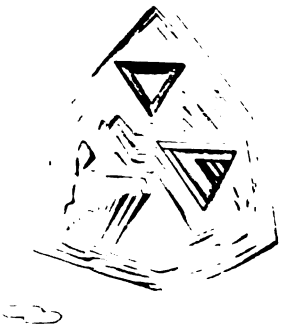


Fig. 3.

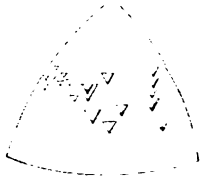


Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Lith. Eenrich & Bingen

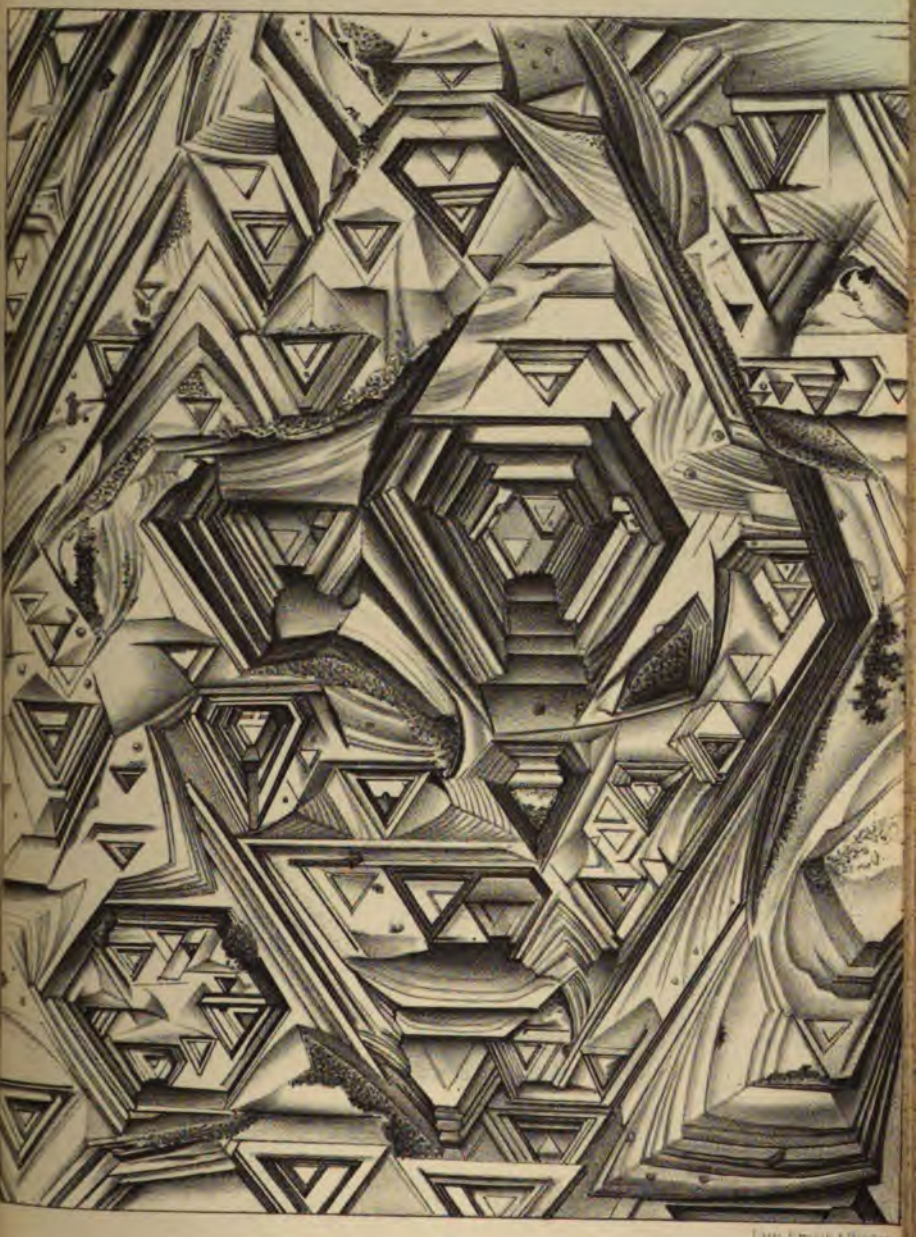
Met de bewering van G. Rose dat het diamant ook hemiëdrisch zoude voorkomen, dus in den tetraëdervorm, kan Sadebeck zich niet vereenigen en vermoedt dat Rose, zoo hij zijne onderzoekingen over de wijze van vorming der diamantkristallen had kunnen voortzetten, tot de conclusie zoude gekomen zijn, dat het diamant alleen holoëdrisch voorkomt. Terecht merkt Sadebeck daarbij op, dat de beschouwing der uiterlijke vormen hand aan hand moet gaan met de kristallotektoniek der kristalliseerende stoffen, wil men een waren blik verkrijgen in de wetten der kristallisatie.

Het is op die kristallotektoniek, anders gezegd op den opbouw van een groot kristal uit eene aaneenschakeling van kleine kristallen of subindividuën, dat wij vooral onze aandacht hebben gevestigd, in verband met de twee vormen waarin het diamant, behalve in den goed gekristalliseerden, voorkomt, namelijk in dien van den meestal kogelvormigen boord, en van den op het bloote oog amorph schijnenden carbon of carbonado.

Hoe door aangroeiing van de zijvlakken van het octaëder, al naarmate die aangroeiingen de octaëdervlakken meer of min volkomen bedekken, de verschillende afgeleide vormen, zooals zij bij het diamant worden aangetroffen, kunnen ontstaan, hebben Rose en Sadebeck nauwkeurig beschreven, zoodat wij dit punt onaangeroerd kunnen laten; doch wij kunnen ons niet vereenigen met hunne voorstelling over de schaalsgewijzeaangroeiing bij het diamant, die door niets bewezen wordt, maar juist door de splijting, die alleen volgens de octaëdervlakken geschiedt, wordt tegengesproken. Indien men slechts op het uiterlijke afgaat, zoude men eveneens bij sommige pyrieten de schaalvormige aangroeiing moeten aannemen, terwijl op de breukvlakte niets van concentrische lagen te bespeuren is, evenmin als bij het diamant. Geheel anders vertoonen zich eenige kwartskristallen, waarbij op de breukvlakte die schaalvormige aangroeiing duidelijk is waar te nemen. Dat de aangroeiing bij het diamant daarentegen door kristallieten of subindividuën geschiedt, die zich regelmatig op de oppervlakte der kristalvlakken rangschikken, bewijzen de prachtige regelmatige figuren, die zich

op sommige vlakken van natuurlijke diamantkristallen vertoonen, en ons aan de etsfiguren doen denken.

Door de welwillendheid van den eigenaar, den Heer S. Baszanger, juwelier te Amsterdam, ben ik in staat gesteld aan de Afdeeling een prachtig ongeslepen diamant-octaëder van ruim 55 karat te vertoonen, daarenboven hoogst opmerkelijk door de aangroeiing van andere minder-goed gevormde diamanten en van boord; op een der octaëdervlakken ziet men reeds met het bloote oog die fraaie regelmatige figuren. Niet minder leerrijk zijn de hiermede geheel overeenkomende figuren op een kleinen tweelingdiamant, lang 7,5 mm., breed 5 mm., dik 2 mm. en wegende 0,1345 gr., die ik aan de goedheid van den Heer A. Daniels, directeur der diamantslijperij alhier, te danken heb; op dezen steen zijn die figuren alleen met het gewapend oog zichtbaar, en wel op alle vlakken der beide kristallen. De afbeeldingen, bij tienmalige vergrooting (Plaat I, fig. 1 en 2) en die van een klein gedeelte der oppervlakte bij 200-malige vergrooting (Plaat II) vertoonen ons meestal gelijkzijdige driehoeken, of ook driehoeken met afgeknotte hoeken, die soms in gelijkzijdige zeshoeken overgaan; het meerendeel dezer figuren zijn holten met trapvormige verdiepingen en platten bodem; soms ook, doch zelden, steken deze kristallieten boven de oppervlakte uit. Diezelfde figuren neemt men soms waar op de splijtingsvlakken van het diamant (Fig. 3 stelt een splijtingsvlak bij 10-malige vergrooting voor) en vrij algemeen op de oppervlakte van ruwe en geslepen diamanten, die door verbranding aan de lucht of in zuurstofgas mat zijn geworden. Bij de driehoekige figuren zijn alle kanten naar de zijden (kantlijnen) der kristalvlakken gekeerd. Het ontstaan van deze holten en bolligheden is eenvoudig af te leiden uit het ontbreken of overtollig zijn van octaëdrische subindividuën, uit wier aaneenschakeling de groote kristallen gevormd zijn. Steken de octaëdrische subindividuën uit, zoo moeten hunne uitstaande vlakken evenwijdig zijn aan het vlak waarvan zij een deel uitmaken; ontbreken daarentegens ergens sommige subindividuën, zoo zal de bodem der daaruit ontstane holte moeten beantwoorden aan het ondervlak van het ontbrekende subindividu, en



Lith. Emrik & Binger

dus symmetrisch zijn gelegen ten opzichte van het omgevende vlak.

Op cubusvlakken vindt men wel eens, ofschoon zeer zelden, vierhoeken, die echter niet van den cubus moeten worden afgeleid, maar van octaëdrische subindividuën, wier toppen zij vertegenwoordigen, even als de driehoeken zulks de vlakken doen. Fig. 4 vertoont een der vlakken van een kleinen 0.013 gr. wegenden cubus, die slechts 1,75 mm. kantlengte heeft.

Ten opzichte hiervan zijn zeer leerrijk de twee kristallen, behoorende aan den Heer DANIELS, waarin vierkante gaten voorkomen, die door het geheele kristal heenloopen; het eene kristal heeft drie doorloopende, onderling communiceerende gangen, en nog drie minder diepe piramidale kuilen, terwijl nergens breukvlakken te zien zijn; de gaatjes zijn zuiver vierkant; het eene heeft een kantlengte van 0,56 mm., het andere van 0,7 mm. Om de gaatjes heen ziet men een aantal trapjes, elkander onder rechte hoeken snijdende en enkele zuiver vierkante piramidische kuiltjes; hetzelfde is ook in de niet doorgaande holten het geval.

Beschouwen wij nu de twee andere toestanden, waarin het diamant wordt gevonden, namelijk den kogelvormigen boord en den schijnbaar amorphen carbon.

De kogelvorm bij den boord is door sommigen toegeschreven aan afschuring door voortrolling, zooals bij de rolsteenen; die afschuring zoude hebben moeten geschieden door schuring van diamanten onderling, daar geen ander bekend gesteente het diamant aantast. Beschouwen wij echter de oppervlakte dier kogels onder het mikroskoop bij gereflecteerd licht, zoo zien wij daarop de fijnste kristallisatie; een afbeelding (Fig. 5) der oppervlakte van een kogelvormigen doorschijnenden boord bij 50-malige vergrooting en opvallend licht, geeft ons volkomen het beeld terug van den vestingagaat. De schijnbaar grootere hardheid van den boord boven het goed gekristalliseerde diamant staat hiermede in direkt verband; zij is alleen een gevolg van de verwarde kristallisatie bij den boord, die daarom ook niet splijtbaar

is. Het onderscheid tusschen boord en goed gekristalliseerd diamant is hetzelfde als tusschen chalcedoon en bergkristal; ieder, die zich met het slijpen dezer beide laatste heeft bezig-gehouden, weet bij ondervinding hoeveel zwaarder het slijpen is van chalcedoon dan van bergkristal; doch hier slijpt men met amaril, een stof die harder is dan het bergkristal; daar er nu voor het diamant geen harder slijpmiddel is dan het diamant zelf, is het duidelijk dat de boord zich op de met diamantpoeder bedekte stalen schijf niet slijpen laat. De diamantsnijder, die door het tegen elkander wrijven van twee diamanten de piramidetoppen der octaëders moet afschuren tot het verkrijgen van de *tafel* en de *kolet* van den brillant, en de slijper, die later de tafel en de kolet moet glad slijpen, weten beiden bij ondervinding hoeveel zwaarder dat werk is dan wanneer zij met octaëdervlakken te doen hebben, omdat zij, zooals zij het noemen, dan *tegen den was* moeten werken; een ongeoefend slijper, die met den was nog niet genoeg vertrouwd is, bederft dikwijls in één dag zijn stalen schijf door ingroeving, terwijl een geoefende die weken lang kan gebruiken.

Wat eindelijk den carbon aangaat, deze komt, zooals ik reeds in 1873 in de Afdeeling mededeelde, in zeer verschillende toestanden voor; soms op de breuk nog vrij kristallijn, soms voor het bloote oog vormloos, dof, met enkele glanzende puntjes en vele poriën, waaruit bij verwarming in water luchtbellen ontsnappen. De poging, door den Heer DANIELS, op mijn verzoek, aangewend om door slijping een dun schijfje carbon te verkrijgen, dat onder het mikroskoop bij doorvallend licht zoude kunnen worden onderzocht, mislukte om dezelfde reden als bij den boord; de carbon laat zich niet slijpen, maar maakt diepe groeven in de schijf; beschouwt men echter, zooals het den Heer BEHRENS gelukt is, de scherpe kanten van splinters carbon onder het mikroskoop, zoo ontwaart men dadelijk dat de carbon uit kleine, verward door elkander liggende, kristalletjes bestaat. De lichtgekleurde grijze variëteit bleek nagenoeg geheel uit mikroskopische kristalletjes te bestaan van helder, doorgaans kleurloos, diamant; de donkerbruine variëteit vertoont slechts

weinige kleurlooze korrels, een weinig meer gele en enkele blauwe; in deze laatste zijn de meeste korrels troebel door een groot aantal uiterst fijne en doorzichtige stippeltjes, die in de grijze in veel minder mate voorkomen; in de bruine variëteit zijn de korrels ook veel meer afgerond en minder goed gekristalliseerd en omhuld door een bruine stof, die, zooals ik reeds in 1873 heb aangetoond, uit ijzeroxydhydraat en kalk bestaat. De structuur van de grijze variëteit is lava-achtig poreus, die der bruine meer schilferachtig. De verhouding van den carbon tot het goed gekristalliseerd diamant kan men gelijkstellen aan die van den zandsteen tot het bergkristal.

Ten slotte wensch ik nog de aandacht te vestigen op een stuk bruinen carbon, aan de eene zijde eindigende in een kogel, die, hoewel ondoorzichtig en zwart, geheel het voorkomen heeft van een boordkogel en waarop, onder het mikroskoop, bij teruggekaatst licht en 50-malige vergrooting, de prachtigste kristallisatie te zien is, die ons geheel het beeld van de ijsbloemen op de vensterruiten voorstelt (Fig. 6); hier is dus overgang van carbon in boord.

Dit onderzoek bevestigt dus volkomen mijne vroegere meening, dat het goed gekristalliseerde diamant, de boord en de carbon, alleen van elkander verschillen door een meer of minder goede kristalvorming en gelijdelijk in elkander overgaan.

RAPPORT

OVER EEN OPSTEL VAN DEN HEER

Dr. C. Ph. SLUITER,

in de Vergadering van 26 Februari 1881 uitgebracht door den Heer

C. VERLOREN.

De Heer Dr. C. Ph. Sluiter te Batavia heeft aan de Akademie, ter plaatsing in de Verslagen en Mededeelingen, toegezonden een opstel, getiteld: » *Voorloopige mededeelingen over eenige nieuwe Holothuriën van de Westkust van Java*", waaruit blijkt dat hij zijne onderzoekingen op dierkundig gebied, voornamelijk der lagere klassen van zeedieren, welke hij met zooveel ijver en moed in de koude Poolzeeën met gunstig gevolg heeft aangevangen, ook op zijne nieuwe verblijfplaats aan de warmere zeeën met niet minder ijver en goed gevolg blijft voortzetten. Wij kunnen en behooren dat streven aan te moedigen en te ondersteunen.

In deze mededeelingen worden eenige zeer merkwaardige nieuwe soorten van Holothuriën voorloopig beschreven. In de eerste plaats eene zeer merkwaardige, die met de soorten van het geslacht *Synapta* het volkomen ontbreken van eene anaal-opening gemeen heeft, terwijl zij overigens daarvan geheel afwijkt, maar meer overeenkomt met de eigenlijke Holothuriën. De schrijver meent, naar het schijnt terecht, daarom een nieuw geslacht er voor te moeten vormen, waarvoor hij, in overeenstemming met die eigenschap, voorstelt den onwelluidenden geslachtsnaam *Ananus*, en voor soortsnaam *holothuroides*.

Ik zou den geachten schrijver wel willen voorstellen, dat leelijk hybridisch en ongrammaticaal woord *Ananus* liever

door een ander, b. v. *Aproctus*, te vervangen en althans geheel bij het Grieksch te blijven.

Vervolgens beschrijft hij eene nieuwe soort van het geslacht *Ocnus*, waarvoor hij den naam van *O. javanicus* voorstelt, bij welke het merkwaardigste is, dat de huid door de menigte samenverbonden kalklichaampjes geheel stijf en hard is.

Dan beschrijft hij uit de familie der *Molpadidae* twee merkwaardige nieuwe soorten: eene van het geslacht *Haplodactyla*, waarvoor hij als soortsnaam voorstelt *hyaloides*, wegens de volkomen glasheldere doorschijnendheid der huid, met bijna geheel ontbrekende kalklichaampjes; de tweede, tot geen der bekende geslachten te brengen, en daarom, als nieuw geslacht, wegens de eigenaardige kortheid der armen, *Microdactyla* genoemd, met den soortsnaam van *caudata*, wegens een staartvormig aanhangsel.

Ik meen der Afdeeling te mogen aanraden, dit opstel in de Verslagen en Mededeelingen eene plaats in te ruimen, waarbij ik echter nog eene opmerking wensch te maken.

Ik kan het niet ontkennen, dat het bij mij onaangename gewaarwordingen opwekt, indien Nederlanders aan eene Nederlandsche Akademie hunne mededeelingen in vreemde talen toezenden. Doen vreemdelingen zulks, dan kan men daar natuurlijk niets tegen hebben. Ook wil ik wel aannemen, dat er soms gevallen kunnen voorkomen, waarbij zulks wenschelijk kan worden geacht, maar niet om het in gewone gevallen regel te doen worden. Ik geloof niet, dat wij, leden der Akademie, daartoe aanleiding geven en kan althans niet denken, dat het iemand onzer in de gedachte zou komen, hier eene mededeeling als de onderwerpelijke in het Duitsch te gaan voordragen. Ik zie de noodzakelijkheid nog niet in, dat wij ons zouden behoeven te gaan germaniseeren.

Men beschouwe deze opmerking als eene persoonlijke, waarmede ik het al te veelvuldig toenemen van die gewoonte in den tegenwoordigen tijd wensch tegen te werken. Ik kan echter niet verlangen dat men om die reden een, overigens verdienstelijk, opstel zou weigeren te plaatsen.

VORLÄUFIGE MITTHEILUNG

UEBER EINIGE

NEUE HOLOTHURIEN VON DER WESTKÜSTE JAVA'S

VON

C. Ph. SLUITER.

Vor einiger Zeit wurden einige sehr eigenthümliche Holothurien in der Sunda-Strasse und auf der Rhede von Batavia von mir gefangen. Ich wünsche hier eine vorläufige Mittheilung von einigen höchst interessanten Verhältnissen zu geben, welche sich bei der Untersuchung herausstellten.

Erstens nenne ich eine ganz afterlose Holothurie. In Hauptsache stimmt sie in allen Theilen mit dem Geschlechte *Holothuria* überein, und hat mit *Synapta* nur das Fehlen des Afters gemein, doch ist sonst weit von dieser entfernt. Das Thier muss gewiss als der Representant eines neuen Geschlechtes betrachtet werden. Als Geschlechtsnamen stelle ich *Ananus*, und als Speciesnamen *holothuroides* vor. Die äusseren Kennzeichen sind:

»Körper gurkenartig, nach hinten sich allmählig verjüngend. Länge des ausgewachsenen Thieres $1^1/_2$ Decimeter. Füsschen unregelmässig über den Körper verbreitet, am Bauche viel stärker gehäuft als am Rücken, kurz und im Leben wenig vorstreckbar. Tentakel 13, kurz, nicht verzweigt, in eine Scheibe endigend, auf einer Mundscheibe eingeflanzt. Aeusserlich ist am Körper keine Spur eines Afters zu entdecken. Farbe dunkelviolett, beinahe schwarz. Mundscheibe fleischfarbig. Tentakel mehr braünlich. Um jedes Füsschen

ein weisser Ring. Am Rücken grosse mehr gelbliche Flecken, welche keine Füsschen umgürten. Fundort: Tandjong-Priak, bei Batavia, im Schlamm. Tiefe 8 Faden."

Kalkablagerungen finden sich bloss in den Ringen um den Füsschen, fast wie die Rädchenpapillen der Chirodoten. Die Form der Kalkkörperchen stimmt am meisten mit der von *Holothuria gracilis* (Semper) überein. Das Merkwürdigste am ganzen Thiere ist das Fehlen des Afters und, was damit zusammenhängt, die wenig ausgebildeten Verdauungsorgane. Magen und Darm sind nur eng und das ventrale und dorsale Darmgefäss nur schwach entwickelt. Am abdominalen Ende wird das Lumen des Darmes je kleiner und kleiner um endlich ganz und gar zu verschwinden. Der Enddarm ist also ganz umgebildet in einen Band van Bindegewebs- und Muskelfasern, welche sich nur lose an die Haut ansetzen. Am Darme ist fernerhin merkwürdig, dass die von Semper als innere Kiemen beschriebene Falten ausserordentlich breit sind, während die Lungen hingegen nur äusserst schwach entwickelt sind, und natürlich nicht mit einer Cloaca in Verbindung stehen können. Die Vermuthung Semper's, dass diese Falten zum Theil die Athmung versorgen, gewinnt hierdurch eine grosse Stütze. Von den Lungen ist nur die rechte dorsale entwickelt, welche in keine Verbindung mit den Blutgefässen tritt, und selbst nur schwach entwickelt ist. Am Wassergefässring finden sich zwei ausserordentlich lange Polische Blasen, und zwei kleine Steinkanälchen.

Eine zweite eigenthümliche Holothurie von dieser Küste ist eine neue Art *Ocnus*, von mir *O. javanicus* genannt. Aeussere Kennzeichen sind: »Körper stark fünfeckig. Auf jeder Kante des Körpers steht nur eine einfache Reihe von 20 bis 23 Füsschen. Diese sind starr und leicht zerbrechlich. Zehn verästelte Tentakel. Haut starr und mehr oder weniger deutlich in Tafeln getheilt. Farbe graulichbraun bis gelblichweiss, mit allen Zwischenstufen. Länge des Körpers 40 bis 45 M.m.

Fundort: Nordwest-Küste Java's. 2 bis 6 Faden.

Auffallend bei diesem *O. javanicus* ist, dass durch die Kalk-

ablagerungen die Haut ganz starr ist. Ausser den Kalkkugeln, welche mehr am Rande liegen, bilden diese Kalkablagerungen eine Art Gittergewebe von zusammenhängenden Bälkchen. Das lebendige Thier ist hierdurch sehr leicht zerbrechlich. Natürlich ist bei einem derartigen starren Körper die Hautmusculatur nur rudimentär. Am Darme ist gleich hinter dem Kalkringe eine kropfartige Auftreibung. Der Darm bildet nicht die gewöhnliche Doppelbiegung, sondern eine Art Darmgekröse. Lungen sind sehr rudimentär. Am Wässergefässring immer zwei Polische Blasen.

Von den Molpadiden nenne ich zwei merkwürdige neue Arten.

Erstens eine Art *Haplodactyla*, welche ich, der glasshellen Haut halber, *H. hyaloides* nenne. Aeussere Kennzeichen sind: »Körper eiförmig; verjüngt sich stark nach dem After zu. Fünfzehn einfache cylindrische Tentakel, welche ziemlich spitz endigen. Am After fünf kurze mehr oder weniger kalkige Papillen. Die fünf Längsmuskeln sind vollkommen deutlich durchscheinend. Farbe glashell, wie der Mantel der Salpen. Länge des Körpers 35 Mm.

Fundort: Insel Onrust. Rehde von Batavia. 8 Faden, im Schlamm.

Die ganze Haut ist durchsichtig und besteht zum grössten Theile aus der hyalinen Grundmasse mit sehr spärlichen Bindegewebsfasern und Bindegewebszellen. Pigmentzellen fehlen ganz. Kalkablagerungen bloss beim After, hauptsächlich in den fünf Analpapillen. Die Form der Kalkkörperchen entfernt sich ziemlich weit von der bei den übrigen Molpadiden. An einem dünnen Hauptstiel finden sich kugelrunde oder gezähnelte Anschwellungen, wenigstens bei den Kalkkörperchen in den Analpapillen. Für die weitere Anatomie verweise ich nach meiner Abhandlung im zunächst erscheinenden Heft des »Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië".

Eine zweite eigenthümliche Form aus der Abtheilung der Molpadiden ist ein Thier, das nicht unter den bis jetzt aufgestellten Geslechtern unter zu bringen ist, warum ich es, wegen der Kleinheit der Tentakel, *Microdactyla*, und die Art,

wegen des schwanzartigen Anhanges, *caudata* nennen möchte. Aeussere Kennzeichen: »Körper mehr oder weniger cylindrisch, nach dem Munde zu wenig verjüngt, nach hinten plötzlich eingeschnürt, so dass der Hintertheil des Körpers sich als ein selbstständiger Schwanzanhang darthut. Am Munde 12 sehr kleine und stumpfe, in eine kleine Scheibe endigende Tentakel, welche nicht aus dem Munde heryorgestreckt werden können. After kreisrund, am Ende des Schwanzanhanges. Mund nicht terminal sondern eingestülpt. Die Haut füllt glatt an. Die fünf Längsmuskeln scheinen nicht durch. Farbe milchweiss. Der Schwanzanhang mehr intens weiss, der übrige Körper mehr blaülich weiss.

Fundort: Sunda-Strasse, unweit Anjer, im Schlamm. 12 Faden.

In der ganzen Haut sind die Kalkablagerungen ausserordentlich zahlreich, ohne aber ein Gittergewebe zu bilden. Die Form der Kalkkörperchen ist die einer durchbrochenen Kugel, und stimmt mit der der Kalkkörperchen andrer Molpadiden nur wenig überein. Am meisten gleichen sie denen von *Colochirus* (Troschel). Die von Semper als Bindekörper bezeichneten biscuitförmigen Stäbchen, welche den Synapten schon zukommen, fehlen vollständig. Für das übrige Anatomische sehe man obengenannte Abhandlung.

Ferner habe ich noch eine ziemliche Anzahl Chirodoten untersucht, welche ich in der Sunda-Strasse gefangen habe. Bei der genauen Betrachtung der Rädchen schien es mir alsob alle Abbildungen und Beschreibungen sie zu einfach darstellten. Ich habe daher eine möglichst naturgetreue Beschreibung und Abbildung gegeben von den Rädchen einer *Chirodota*, welche in allen Hauptsachen mit *Ch. variabilis* (Semper) übereinstimmt.

Batavia, 20 Nov. 1880.

BIJDRAGE

TOT DE

THERMO-CHEMISCHE KENNIS VAN OZON.

DOOR

E. MULDER en **H. G. L. van der MEULEN.**

Ongeveer tien jaren geleden werd door een onzer de meening uitgesproken *), dat ozon waarschijnlijk niet is te beschouwen als $O\overset{O}{\frown}O$, maar wellicht vrije affiniteiten bezit en aldus is geconstrueerd: $\begin{matrix} & O & \\ & | & \\ O & & O \end{matrix}$. Noemt men y de verbindingswarmte van één affiniteit van O met één affiniteit van een ander atoom O, dan zou bij omzetting van 3 $\begin{matrix} O \\ \| \\ O \end{matrix}$ in 2 $\begin{matrix} O \\ | \\ O \\ | \\ O \end{matrix}$ aan calorieën verbruikt worden:

$$a = 4y - 6y = -2y.$$

Voor y werd theoretisch bij benadering berekend de waarde van 22019^c, in welk geval a wordt:

$$a = -44038^c,$$

of wat hetzelfde is:

$$00{,}00{,}00 = -44038^c.$$

*) *Scheik. Aant.* van E. MULDER. Deel II (1871), p. 186, 189.

Er werd evenwel bijgevoegd, dat $y = 22019^c$ zonder twijfel een minimum voorstelt.

De onderzoekingen nu van HAUTEFEUILLE en CHAPPUIS, die ozon leerden kennen als een lichaam, dat bij ontleding aanleiding kan geven tot ontploffing, en de niet minder belangrijke onderzoekingen van den voortreffelijken BERTHELOT *), die met ozon hoogst gewichtige thermo-chemische bepalingen verrichtte, bevestigen gemelde uitspraak in hoofdzaak volkomen. De calorimetrische waarde, door BERTHELOT gegeven voor 00,00,00, is evenwel grooter dan die door berekening vroeger als minimum was aangekondigd. De beteekenis, die de kennis dezer constante vooral later bezitten zal, gaf aanleiding tot het volbrengen van den volgenden arbeid. Alvorens evenwel tot de mededeeling daarvan over te gaan, moge in de eerste plaats de methode, door BERTHELOT gevolgd, in 't kort worden behandeld.

Ter bepaling van de thermo-chemische waarde: 00,00,00, trachtte deze natuurkundige het verschil te leeren kennen tusschen de hoeveelheid warmte, vrijkomende bij de oxydatie van eenig lichaam door ozon en gewone zuurstof, waartoe arsenigzuur werd genomen. Om de waarde te kunnen bepalen van dit lichaam tegenover ozon, werd van een waterige oplossing van arsenigzuur een bekende hoeveelheid genomen, en de verhooging in temperatuur, ontstaan bij het doorvoeren van ozonhoudende zuurstof, nagegaan, terwijl zoowel vóór als na de proef de hoeveelheid arsenigzuur bepaald werd. Uitgaande van de reactie:

$$As_2O_3 + 2\,000 = As_2O_5 + 2\,00,$$

kon de hoeveelheid verbruikt ozon worden gevonden, en vermocht BERTHELOT te komen tot de calorimetrische waarde van:

$$As_2O_3\,Aq, 2\,000.$$

Het ozon, hiertoe aangewend, was gemaakt met droge

---

*) *Compt. rend.* t. 82, 198; *Essai de Mécanique Chimique* par BERTHELOT, T. I, 221; T. II, 366; *Ann. Chim. et de Phys.* (5), 10, 162; *Bull. soc. chim.*, t. 26, 56 en t. 28, 442.

zuurstof, en werd, na den effluve-toestel te zijn doorgegaan, onmiddellijk geleid in gemelde oplossing van arsenigzuur, terwijl vóór en na het doorvoeren van ozonhoudende zuurstof ongeveer een gelijke maat zuurstof (droog) met een zooveel mogelijk gelijke snelheid door de arsenigzuur-oplossing ging. Het arsenigzuur werd genomen in zoutzure-oplossing, en het gehalte hieraan vóór en na de proef bepaald met chamaeleon.

BERTHELOT treedt niet in de wijze van berekening, door hem gevolgd, maar deelt de uitkomst mede van twee proeven, die leidden tot de volgende waarden:

I. $As_2 O_3$ Aq ,2 000 = 137600^c
II. » = 125600
gemiddeld . . . = 131600^c.

Vooral wordt beteekenis gehecht door BERTHELOT aan proef I, die onder gunstiger omstandigheden zou gedaan zijn dan proef II.

De verbindingswarmte van arsenigzuur met gewone zuurstof is niet bekend, maar BERTHELOT meende deze indirect te mogen afleiden uit de calorieën, vrijkomende bij oxydatie van arsenigzuur in oplossing, b. v. met ioodzuur (THOMSEN), waarvoor werd gevonden:

$As_2 O_3$ Aq, 2 O = 78360^c (THOMSEN)
» = 78200 (FAVRE en SILBERMANN)
gemiddeld . . . = 78280^c.

BERTHELOT neemt nu aan, indien wij hem goed begrijpen, dat de zuurstof, b. v. van ioodzuur, ongeveer dezelfde calorische diensten verricht als gewone zuurstof, en hij vindt dan door aftrekken de verlangde constante:

$As_2 O_3$ Aq, 2 000 = 137600^c
$As_2 O_3$ Aq, 00 = 78280
verschil . . . = 59320^c.

In dat geval toch zouden 2 O afgestaan door 2 000 ge-

ven 59320^c meer dan 2 O ontleend aan OO. Aangezien de 2 OO, bij ontleding van 2 OOO overblijvende, eenvoudig zouden ontsnappen (zie vroeger), volgt dan, dat de 2 O van 2 OOO — indien men zich voorstelt, dat deze bij het vrijkomen overgingen in gewone zuurstof OO —, zouden doen vrijkomen 59320^c, dus bij den overgang van 2 OOO in 3 OO zouden ontwikkeld worden 59320^c, of, omgekeerd, bij de omzetting van gewone zuurstof in ozon worden verbruikt:

$$OO,OO,OO = -\ 59320^c.$$

Gaat men uit van het getal, door BERTHELOT gevonden voor proef II, namelijk 125600^c voor $As_2\,O_3\,Aq$, 2 OOO, dan wordt een kleinere waarde verkregen:

$$\begin{aligned} As_2\,O_3\,Aq,\ 2\ OOO &= 125600^c \\ As_2\,O_3\,Aq,\ OO &= 78280 \\ \text{verschil} \ldots &= 47320^c, \end{aligned}$$

of:

$$OO,OO,OO = -\ 47320^c.$$

Deze waarde nadert werkelijk vrij goed tot die, theoretisch bepaald, namelijk — 44038, welke als te laag werd aangegeven, terwijl het verschil 47320—44038 = 3282^c geringer is dan dat der twee bepalingen van BERTHELOT: 59320—47320 = 12000^c.

Bij onze proeven werden de volgende wijzigingen aangebracht in de methode, door BERTHELOT gekozen.

1. In de eerste plaats werd de ozonhoudende zuurstof geleid uit den effluve-toestel in een glazen gashouder, met een inhoud van ongeveer 11 liter, gevuld met gedestilleerd water.

2. De aanvoerbuis voor het ozon in de glazen kolf met arsenigzuur-oplossing was aan het uiteinde voorzien van vele haarbuisjes, om het ozon meer te verdeelen, en daarenboven de oplossing naar behooren te vermengen, waartoe dientengevolge de thermometer niet behoefde aangewend te worden.

3. Een aspirator was verbonden met een buis, boven in de kolf uitkomende, ten einde de ozonhoudende zuurstof met groote snelheid te jagen door de oplossing van arsenigzuur, zoodat eenmaal in ongeveer *drie* minuten negen liters gas konden doorgeleid worden.

4. Het arsenigzuur was opgelost in water zonder zoutzuur, terwijl werd getitreerd met een oplossing van iodium in ioodkalium, naar de bekende reactie: $As_2O_3 + 4I + 2H_2O = As_2O_5 + 4IH$.

Zoowel vóór als na het doorvoeren van ozonhoudende zuurstof, werd lucht (niet gedroogd) geleid door de kolf (waarbij noodwendig tevens de aspirator dienst deed), welke lucht op de temperatuur der cal. vloeistof geen merkbaren invloed uitoefende (zie later).

Alle verbindingen van buizen, waardoor ozon toog naar de kolf, geschiedden met zegellak.

Calorimeter en thermometer mochten geacht worden te voldoen aan de noodige vereischten.

Bij het titreeren werd bij de eerste proef te werk gegaan als naar gewoonte; later werd ongeveer $\frac{As_2O_3 = 198}{4}$ gr. arsenigzuur in water opgelost tot nagenoeg een liter, en daarvan een deel *afgewogen* ter bepaling van het titre der iodiumoplossing. Het iodium werd (vermengd met ioodkalium) door sublimatie gezuiverd, en hiervan ongeveer $12{,}5 \times \frac{1}{5}$ gr. met $18 \times \frac{1}{5}$ gr. ioodkalium in water opgelost tot nagenoeg een liter. Met deze iodiumoplossing werd het titre bepaald eener *gewichts-hoeveelheid* der oplossing van de kolf vóór en na de proef. Het titreeren geschiedde overigens op de bekende wijze, en er werd bij de arsenigzuur-oplossing een weinig gedaan van een oplossing van koolzuren ammoniak en eenig stijfselwater.

De waarde van As_2O_3 Aq, 2 000 werd berekend naar de vergelijking:

$$R = \frac{2m}{f}(b + p)\,q,$$

waarin voorstelt:

b. De gew.-hoev. in gr. aan oplossing der kolf.

p. De waterwaarden van thermometer, absorptietoestel en glazen kolf.

q. Het verschil in graden Celsius der oplossing in de kolf vóór en na de proef.

f. De hoev. ozon in gr. verbruikt door het arsenigzuur in de kolf.

m. Het mol.-gew. van ozon: OOO = 48.

R. Het aantal calorieën berekend op As_2O_3 Aq, 2 000.

De s. w. der oplossing werd genomen = 1.

In de volgende proeven was:

	b.	*p*.	*q*.	*f*.	*R*
Proef	I... 564,878	18,3	0,34°	0,14308	133000
»	II... 601,778	18,3	0,275	0,11558	141600
»	III... 579,778	18,3	0,5	0,19788	145000.

Bij proef I werden doorgevoerd ongeveer $9^1/_4$ liter aan ozonhoudende zuurstof, in proef II $7^1/_4$ liter, in proef III 10 liter. Vóór en na het doorvoeren van ozonhoudende zuurstof, werd lucht doorgelaten uit een gashouder met water, en wel ongeveer 6 liter vóór en 6 liter na (in proef III meer). De temperatuur werd na iedere 20 sec. afgelezen, om den gang der proef te kunnen volgen, en was in:

Proef I.		Proef II.		Proef III.	
7,14°	7,48	6,035°	7,275	6,44°	6,80
7,14	7,48	6,035	7,285	6,44	6,82
7,14	7,48	6,035	7,285	6,44	6,845
7,14	7,48	6,035	7,29	6,44	6,875
7,14	7,48	6,035	7,295	6,44	6,90
7,14	7,48	6,035	7,30	6,44	6,92
7,14	7,48	6,035	7,30	6,44	6,94
7,18	7,48	6,035	7,305	6,44	6,94
7,22	7,48	6,035	7,305	6,44	6,94
7,25	7,48	6,06	7,305	6,44	6,94
7,29		7,10	7,31	6,48	6,94
7,30		7,14	7,31	6,50	6,94
7,36		7,165	7,31	6,535	6,94
7,40		7,185	7,31	6,56	6,94
7,435		7,205	7,31	6,585	6,94
7,46		7,225	7,31	6,615	6,94
		7,24	7,31	6,64	6,94
		7,25	7,31	6,665	6,94
		7,26	7,31	6,695	6,94
		7,265		6,72	6,94
				6,74	6,94
				6,75	

Vooralsnog moet de grootste waarde worden toegekend aan het hoogste cijfer, daar er wel oorzaken bekend zijn, die een merkbaar verlies aan warmte zouden kunnen te weeg brengen, maar geen oorzaken, welke een noemenswaardige verhooging in temperatuur ten gevolge hebben. Niet onwaarschijnlijk werd de ozonhoudende zuurstof bij proef I te snel doorgevoerd; bij proef II werkte de aspirator niet zoo regelmatig als wenschelijk was, terwijl de hoeveelheid ozon, die werd opgenomen, betrekkelijk gering was; bij proef III daarentegen schenen de omstandigheden vergelijkenderwijze gunstig te zijn.

Neemt men met BERTHELOT: $As_2 O_3$ Aq, OO = 78280^c, dan zou proef III leiden tot:

$$\begin{aligned} As_2 O_3 \text{ Aq}, 2\,000 &= 145000^c \\ As_2 O_3 \text{ Aq}, \text{OO} &= 78280 \\ \text{verschil} \ldots &= 66720^c \end{aligned}$$

of:

$$\text{OO,OO,OO} = -\,66720^c.$$

Het gemiddelde der drie proeven geeft:

$$\begin{aligned} As_2 O_3 \text{ Aq}, 2\,000 &= 139800^c \text{ (gemiddelde)} \\ As_2 O_3 \text{ Aq}, \text{OO} &= 78280 \\ \text{verschil} \ldots &= 61520^c, \end{aligned}$$

dus:

$$\text{OO,OO,OO} = -\,61520^c.$$

Bij het beoordeelen dezer cijfers moet men wel in 't oog houden, dat de betrekkelijk kleine hoeveelheid ozon, die ontleed wordt, een geringe verhooging veroorzaakt in temperatuur, en dat b. v. in proef I een fout van 0,005° (zegge vijf duizendsten van een graad), en zoo een fout van 0,1 C.C. bij het titreeren der oplossing in de kolf, een invloed uitoefent (berekend op $As_2 O_3$ Aq, 2 000) van ongeveer 2000^c. De vrij groote waterwaarde der kolf werkt ook niet in een gunstigen zin. Deze proeven zullen voortgezet worden, terwijl het streven zal zijn om de constante meer nauwkeurig te bepalen. Reeds werd een verhooging in temperatuur bereikt,

zooals tot nog toe niet was verkregen, terwijl wij weldra in staat hopen te wezen, een grootere hoeveelheid ozon in de calorimetrische kolf te doen opnemen. Tevens worden pogingen aangewend, ozon in gewone zuurstof om te zetten met platinazwart, ten einde de omzettingswarmte direct te kunnen bepalen. Van ozonhoudende zuurstof, geleid door een buisje met platinazwart, werd al het ozon ontleed. Uitvoerige onderzoekingen alleen zullen in staat zijn uit te maken, of hier slechts omzetting plaats heeft van ozon in gewone zuurstof, dan wel ook zuurstof wordt vastgelegd.

Utrecht, 26 Februari 1881.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELINGEN VAN

Dr. H. KAMERLINGH ONNES,

GETITELD:

1. VERDERE UITBREIDING DER STELLING: DE GELIJKVORMIGHEID DER THERMODYNAMISCHE OPPERVLAKKEN IS DE UITDRUKKING VAN DE GELIJKVORMIGHEID IN DE BEWEGING DER MOLEKULEN

EN

2. ALGEMEENE VLOEISTOFTHEORIE. IIde STUK.

(Uitgebracht in de Vergadering van 26 Februari 1881).

Deze beide verhandelingen sluiten zich onmiddellijk aan bij een vroegeren arbeid van den schrijver, welke door de Akademie voor hare werken is aangenomen.

In de eerste verhandeling is het doel van den schrijver, aan te toonen, dat zelfs in de onderstelling, dat bij de gassen, als zij tot vloeistoffen overgaan, samenkoppelingen van molekulen moeten aangenomen worden, de algemeene wet der overeenstemmende toestanden zal moeten blijven gelden — ingeval n.l. deze samenkoppelingen van physischen aard zijn. Onder physische samenkoppelingen worden dan diegenen verstaan, welke het gevolg zijn van de werkingen der molekulen der verschillende stoffen, die volgens gelijksoortige wetten van gelijkstandige punten uitgaan — terwijl bij chemische samenkoppelingen de oorzaak in de niet-gelijksoortige werkingen der bestanddeelen, niet van gelijkstandige punten uitgaande, te zoeken is. In de onderstelling dat de krachten,

welke van de gelijkstandige punten uitgaan, in omgekeerde reden van een macht van den afstand werken, volgt de algemeene vloeistofwet weder uit het beginsel van de gelijkvormigheid in de beweging.

Bij de afleiding van regels voor de waarde der capillariteits-constanten, wrijvings-coëfficiënten, enz., in overeenstemmende toestanden der stoffen, vindt de schrijver denzelfden regel voor de capillariteits-constante, welke in de vorige vergadering der Akademie is medegedeeld geworden. Toen was die regel afgeleid uit de onderstelling, dat de molekulaire krachten zich slechts van molekuul op molekuul voortplanten, en dat dus de straal van de sfeer van attractie evenveel rijen molekulen omvatten moest — terwijl de mogelijkheid gesteld werd dat, als de molekulaire krachten op afstand werkten, die straal daarentegen bij alle stoffen even groot zou gevonden worden. Uit de wijze, waarop de schrijver dezer verhandeling tot den regel der capillariteits-constante komt, blijkt dat ook de *actio in distans* tot de uitkomst voert, dat de straal van de sfeer van attractie bij de verschillende stoffen verschillend is, evenredig aan de lineaire afmetingen der molekulen — mits die werking op afstand bij alle stoffen volgens dezelfde wet geschiede.

In de tweede verhandeling wordt de wet der overeenstemmende dampspanningen uit de beschouwingen der kinetische theorie afgeleid.

Het proces der verdamping stelt de schrijver zich aldus voor: Alle molekulen der vloeistof, waarvoor de levende kracht der snelheids-component, in de richting loodrecht op de grenslaag, bij het bereiken van die laag, grooter is dan zekere waarde α, gaan er ongehinderd door heen; evenzoo is dit het geval met *alle* molekulen, die van de zijde van den damp komen. De snelheids-component, loodrecht op die laag, wordt bij de eerste molekulen zoo ver verminderd, dat de aan die vermindering beantwoordende levende kracht gelijk is aan α; bij de laatste molekulen wordt die component even veel vergroot. Uit die voorstelling volgt weder, door

toepassing van het beginsel der gelijkvormigheid, de wet der overeenstemmende dampspanningen, en zelfs wordt daaruit dezelfde vergelijking verkregen, als uit het criterium van MAXWELL-CLAUSIUS volgt.

Wij meenen dan ook om de verdienstelijke wijze van behandeling van een onderwerp, dat in deze Akademie het eerst ter sprake is gebracht, te mogen adviseeren deze verhandelingen in de werken op te nemen.

De Commissie
J. D. VAN DER WAALS,
J. BOSSCHA,
C. H. C. GRINWIS.

Februari 1881.

OVER DE AANSLUITING

VAN EEN

DRIEHOEKSNET VAN LAGERE ORDE

AAN EEN

DRIEHOEKSNET VAN HOOGERE ORDE.

DOOR

Ch. M. SCHOLS.

§ 1. Bij eene rationeele opmeting van een eenigzins groot terrein, wordt dat terrein eerst door een net van lijnen overdekt, die nauwkeurig worden opgenomen en ten opzichte waarvan later de details worden opgemeten. Is op het terrein vroeger eene groote driehoeksmeting uitgevoerd, dan is het wenschelijk het net voor de detailmeting daaraan te verbinden. Een van de methoden, die hierbij kunnen worden toegepast, bestaat daarin, dat men het net van lagere orde tot een zelfstandig driehoeksnet vormt en dit aan het net van hoogere orde verbindt, door daarin twee, drie of meer punten van dit laatste net op te nemen.

Hoe grooter het aantal aansluitingspunten is, des te ingewikkelder wordt natuurlijk de berekening; men bepaalt zich daarom meestal tot de aansluiting aan drie punten, in dien zin dat men de driehoekspunten van het net van lagere orde, die gelegen zijn binnen denzelfden driehoek van het net van hoogere orde, aan de drie hoekpunten van dezen driehoek aansluit.

Wilde men hierbij op rationeele wijze te werk gaan, dan

zou men de fouten, die in het net van lagere orde voorkomen, zoodanig moeten vereffenen, dat voldaan werd aan de meetkunstige eigenschappen van het net; dat men voor de coördinaten van de aansluitingspunten de waarden terugvond, die zij in het net van hoogere orde bezitten en dat de som van de vierkanten van de aan de gemeten hoeken aan te brengen correctiën een minimum werd.

De voor deze vereffening uit te voeren berekening is echter zeer omslachtig en de daardoor te verkrijgen nauwkeurigheid, grooter dan volgens de een of andere benaderingsmethode, weegt meestal niet op tegen den grooteren arbeid. Men slaat daarom meestal een eenigzins anderen weg in. Men beschouwt eerst het net van lagere orde geheel zelfstandig, vereffent daarin de fouten volgens de eene of andere rationeele benaderingsmethode en berekent de coördinaten der hoekpunten. Men brengt dan eindelijk de aansluiting aan het net van hoogere orde teweeg, door aan die coördinaten zekere correctiën aan te brengen.

Deze correctiën zal men zoodanig dienen te bepalen, dat daardoor aan de hoeken van het net van lagere orde zoo weinig mogelijk veranderd wordt. Men zal dus goed doen met te zorgen, dat de som van de vierkanten van deze veranderingen een minimum wordt. Dit is wel is waar niet zuiver hetgeen de waarschijnlijkheidsrekening eischt; volgens haar zou de som van de vierkanten van de totale correctiën een minimum moeten zijn en niet die van de partiëele correctiën. Intusschen is dit eene benadering, die hier wel mag worden toegelaten om de berekening te vereenvoudigen; en mogen wij dus die methode als de betere beschouwen waarin die som de kleinere is.

Aangezien bij het net van lagere orde geen basis en geen azimuth gemeten wordt, zoo wordt, nadat de fouten in het net zelf vereffend zijn, op de bekende wijze, uit de lengte en het azimuth van een der zijden van het net van hoogere orde de lengte en het azimuth van een der zijden van het net van lagere orde berekend en deze aan de berekening van de coördinaten van dit net ten grondslag gelegd.

Door deze handelwijze sluit het net van lagere orde reeds

volkomen aan twee punten van het net van hoogere orde en alleen voor het derde punt zal men een verschil aantreffen tusschen de coördinaten uit de twee driehoeksnetten. Het komt er dus nu nog op aan, aan de coördinaten van de punten van het net van lagere orde zoodanige correctiën aan te brengen, dat ten slotte ook de aansluiting aan het derde punt verkregen wordt.

Te vergeefs zoekt men in de verschillende werken over landmeten naar eene methode voor de berekening van die correctiën. Mij is alleen eene methode van den Heer GLEUNS bekend, die bij het kadaster hier te lande gebruikt wordt. Deze methode die, wat de berekening der correctiën betreft, zeker zeer eenvoudig is, blijkt echter bij nader onderzoek aan de hoeken vrij groote veranderingen te doen ondergaan.

Ik heb daarom getracht eene andere methode te vinden, die, zonder tot omslachtige berekeningen aanleiding te geven, de hoeken van het net veel geringere wijzigingen doet ondergaan, en ben daarin geslaagd, door op de verandering der coördinaten de theorie toe te passen, die bij de kaartprojectiën bekend staat onder de benaming van de conforme overbrenging en het eerst door GAUSS volledig ontwikkeld is in de beantwoording van eene prijsvraag, in 1822 door de K. Akademie van Wetenschappen te Koppenhagen uitgeschreven en in SCHUMACHERS *Astronomische Abhandlungen*, Heft 3. Altona 1825, uitgegeven onder den titel: » Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegeben Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird."

Ten einde de door mij ontwikkelde methode met die van den Heer GLEUNS te kunnen vergelijken, zal ik beginnen met eerst deze methode te ontwikkelen en aan een onderzoek te onderwerpen.

§ 2. Stelt in fig. 1 $A\ B\ C$ den aansluitingsdriehoek voor en heeft men de aansluiting aan de zijde $A\ B$ bewerkstelligd, dan zullen de coördinaten $x_c\ y_c$ van het punt C in het net van lagere orde nog niet overeenstemmen met de coördinaten $X_c\ Y_c$ van die punten in het net van hoogere orde; daaraan zal men nog zekere correctiën moeten aan-

brengen, namelijk $\Delta_{xc} = X_c - x_c$ en $\Delta_{yc} = Y_c - y_c$. Het punt C zal zich dus over een afstand s in eene richting, die een hoek σ met de y-as maakt, moeten verplaatsen; waarbij de afstand s en de hoek σ worden gevonden uit de formules:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{xc} &= s \sin \sigma \\ \Delta_{yc} &= s \cos \sigma\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Volgens de methode GLEUNS wordt nu elk punt verplaatst in *dezelfde richting* als het punt C en over een afstand *evenredig met den afstand* van dat punt *tot aan de lijn* AB; waaruit onmiddellijk volgt, dat de aan de x en y van een willekeurig punt aan te brengen correctiën ook evenredig zijn met den afstand tot aan de lijn AB. Daar bij deze methode alle punten volgens evenwijdige lijnen verschoven worden, zoo zullen wij haar voortaan bestempelen met den naam van de *methode der parallelle verschuiving*.

Teekent men de triangulatie-kaart met behulp van de voorloopige coördinaten, dan kan men daaruit door eene eenvoudige constructie onmiddellijk de gevraagde correctiën vinden. Trekt men namelijk uit het punt C twee lijnen naar de lijn AB en verdeelt deze in even veel gelijke deelen als Δ_{xc} en Δ_{yc} centimeters bevatten, dan heeft men slechts uit ieder hoekpunt van het net eene lijn te trekken, evenwijdig met AB, om op de aldus verkregen schalen de twee correctiën in centimeters af te lezen.

Door aan die twee lijnen een zoodanige lengte te geven dat het aantal millimeters, die zij bevatten, in een eenvoudig verband staan tot het aantal centimeters van Δ_{xc} en Δ_{yc}, kan men de vereischte verdeeling daarop onmiddellijk met behulp van een dubbelen decimeter afzetten. Bij het voorbeeld van fig. 1, dat later uitvoerig behandeld wordt, is $\Delta_{xc} = 115$ en $\Delta_{yc} = 97$ centimeter. De lengten der twee lijnen zijn nu, in millimeters genomen, anderhalf *) maal 115

*) De verhouding anderhalf was de eenvoudigste, die men hier kon toepassen. Bij toeval valt daarbij de lijn voor de correctiën Δ_x samen met de zijde AC van den aansluitingsdriehoek.

resp. 97; zoodat iedere verdeeling juist anderhalven millimeter is. Trekt men nu b. v. uit het punt L eene lijn evenwijdig aan AB, dan leest men onmiddellijk op die twee schalen af:

$$\Delta_x = 16{,}8 \text{ en } \Delta_y = 14{,}2 \text{ centimeter.}$$

Eene eenvoudigere bepaling van de correctiën voor de coördinaten is zeker niet mogelijk.

§ 3. Tengevolge van de veranderingen, die het net ondergaat door de aansluiting aan het derde punt, ondergaat iedere lijn van het net eene tweeledige verandering: eene vergrooting en eene verdraaiing; de laatste verandering heeft op hare beurt eene wijziging van de hoeken tengevolge. Voor eene juiste beoordeeling van de methode is het van belang deze veranderingen te leeren kennen.

Om deze veranderingen na te gaan, is het noodig de correctiën Δ_x en Δ_y van de coördinaten uit te drukken in de coördinaten van het punt zelf. Kiezen wij daartoe den oorsprong van het rechthoekige coördinatenstelsel in een punt van de lijn AB en drukken wij den hoek, die deze lijn met de y-as maakt, door de letter φ uit, dan wordt de afstand van een punt, waarvan de coördinaten zijn x en y, uitgedrukt door: $(x \cos\varphi - y \sin\varphi)$ en de correctiën van de coördinaten dus door:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= \frac{\Delta_{xc}}{h}(x\cos\varphi - y\sin\varphi) = \frac{s}{h}\sin\sigma(x\cos\varphi - y\sin\varphi) \\ \Delta_y &= \frac{\Delta_{yc}}{h}(x\cos\varphi - y\sin\varphi) = \frac{s}{h}\cos\sigma(x\cos\varphi - y\sin\varphi) \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

waarin h de lengte van de loodlijn, uit het punt C op AB neergelaten, voorstelt.

Ondergaan nu de coördinaten $x_1 y_1$ en $x_2 y_2$ van de uiteinden eener lijn $A_1 A_2$ fig. 3 de correctiën Δ_{x_1} Δ_{y_1} en Δ_{x_2} Δ_{y_2}, dan ondergaat de lijn daardoor de betrekkelijke vergrooting:

$$V = (\Delta_{x_2} - \Delta_{x_1})\frac{\sin\psi}{l} + (\Delta_{y_2} - \Delta_{y_1})\frac{\cos\psi}{l} \quad \ldots (3)$$

en de draaiing:

$$D = (\Delta_{x_2} - \Delta_{x_1}) \frac{\cos \psi}{l} - (\Delta_{y_2} - \Delta_{y_1}) \frac{\sin \psi}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

in de richting van de positieve y-as naar de positieve x-as, als l en ψ voorstellen respectievelijk de lengte van de lijn en den hoek, dien zij met de y-as maakt.

Substitueeren wij in deze uitdrukkingen voor Δ_{x_1} Δ_{y_1} Δ_{x_2} en Δ_{y_2} hunne waarden volgens bovenstaande formules (2), uitgedrukt in de coördinaten x_1, y_1, x_2 en y_2, en nemen wij in aanmerking dat:

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= l \sin \psi \\ y_2 - y_1 &= l \cos \psi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

is, dan vinden wij, na eene kleine vervorming, voor de betrekkelijke vergrooting:

$$V = \frac{s}{h} \sin (\psi - \varphi) \cos (\psi - \sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en voor de verdraaiing:

$$D = -\frac{s}{h} \sin (\psi - \varphi) \sin (\psi - \sigma), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welke formules ook als volgt kunnen geschreven worden:

$$V = \frac{s}{2h} \{\sin (2\psi - \varphi - \sigma) + \sin (\sigma - \varphi)\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

en:

$$D = \frac{s}{2h} \{\cos (2\psi - \varphi - \sigma) - \cos (\sigma - \varphi)\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Uit de formules (6) en (7) of (8) en (9) blijkt dat de veranderingen, die de lijnen ondergaan, geheel onafhankelijk zijn van de plaats, die zij in het net innemen, maar alleen

afhangen van hare richting. De vergrooting wordt nul voor de vier richtingen:

$$\psi = \varphi,\ \psi = 90^0 + \sigma,\ \psi = 180^0 + \varphi \text{ en } \psi = 270^0 + \sigma;$$

door deze vier richtingen wordt de geheele omtrek in vier deelen verdeeld; in twee daarvan worden de lijnen vergroot, in de twee anderen verkleind. De draaiing is nul voor de vier richtingen:

$$\psi = \varphi,\ \psi = \sigma,\ \psi = 180 + \varphi \text{ en } \psi = 180^0 + \sigma;$$

door deze vier richtingen wordt de omtrek eveneens in vier deelen verdeeld, in twee waarvan eene draaiing in positieven zin plaats heeft, terwijl de lijnen in de twee andere deelen in negatieven zin draaien.

Om de veranderingen der hoeken na te gaan, nemen wij eene tweede lijn, van het eerste punt A_1, fig. 4, uitgaande en waarvan het andere eindpunt A_3 tot coördinaten heeft $x_3\, y_3$. Onderscheiden wij de hoeken der beide lijnen met de y-as door ψ_2 en ψ_3, en de draaiingen die zij ondergaan door D_2 en D_3, dan is volgens formule (9):

$$D_2 = \frac{s}{2h}\{cos\,(2\,\psi_2 - \varphi - \sigma) - cos\,(\sigma - \varphi)\}$$

$$D_3 = \frac{s}{2h}\{cos\,(2\,\psi_3 - \varphi - \sigma) - cos\,(\sigma - \varphi)\},$$

waaruit door aftrekking volgt voor de verandering, die den hoek tusschen beide lijnen ondergaat:

$$\delta = D_3 - D_2 = \frac{s}{2h}\{cos\,(2\,\psi_3 - \varphi - \sigma) - cos\,(2\,\psi_2 - \varphi - \sigma)\} =$$

$$= -\frac{s}{h}\,sin\,(\psi_3 + \psi_2 - \varphi - \sigma)\,sin\,(\psi_3 - \psi_2) \ldots (10)$$

Hieruit blijkt dat de verandering, die de hoek ondergaat, alleen afhangt van de richting der twee beenen of, zoo men wil, van de grootte van den hoek en van de richting van de lijn, die den hoek midden doordeelt.

Daar $sin\,(\psi_3 - \psi_2)$ altijd positief is (voor de lijn $A_1 A_3$ nemen wij steeds de lijn, die de grootere hoek ψ met de y-as maakt), zoo hangt het teeken van δ alleen af van den hoek $\frac{\psi_3 + \psi_2}{2}$ dien de lijn, die den hoek midden doordeelt, met de y-as maakt. Door de vier richtingen:

$$\frac{\varphi + \sigma}{2},\ 90^0 + \frac{\varphi + \sigma}{2},\ 180^0 + \frac{\varphi + \sigma}{2} \text{ en } 270^0 + \frac{\varphi + \sigma}{2},$$

wordt de omtrek in vier gelijke deelen verdeeld. Valt de lijn, die den hoek midden doordeelt, tusschen de eerste en tweede of tusschen de derde en vierde van die richtingen, dan ondergaat de hoek eene vermindering; valt die lijn in een van de twee andere vakken, dan wordt de hoek grooter.

§ 4. De eenvoudigste wijze, waarop men den driehoek $A\,B\,C$ fig. 10 in kleinere driehoeken kan verdeelen, is, dat men ieder van de drie zijden in n gelijke deelen deelt en door de deelpunten lijnen trekt, evenwijdig aan de twee andere zijden. Het driehoeksnet van lagere orde dat daardoor ontstaat, bevat n^2 gelijk en gelijkvormige driehoeken. De overeenkomstige zijden van die driehoeken zijn allen evenwijdig aan elkaar; zij ondergaan dus allen dezelfde verdraaiing, waaruit volgt dat ook de overeenkomstige hoeken van alle driehoeken dezelfde verandering ondergaan, zoowel in de driehoeken, die gelijkstandig zijn met den driehoek $A\,B\,C$ als in de anderen.

De groote driehoek $A\,B\,C$ in het net van lagere orde ondergaat bij de aansluiting ook eene wijziging, en aangezien de zijden van dezen driehoek dezelfde richting hebben als de zijden van de kleine driehoeken, zoo ondergaan de hoeken juist dezelfde veranderingen als de overeenkomstige hoeken van de kleine driehoeken. Drukken wij nu de som van de vierkanten der veranderingen, die de hoeken van den grooten driehoek ondergaan door S uit, dan is die som voor ieder van de kleine driehoeken ook S en dus voor de n^2 driehoeken van het net van lagere orde:

$$n^2 S.$$

Hieruit blijkt dat, als men twee driehoeksnetten heeft, het eene met een klein en het tweede met een groot aantal driehoeken, en als daarbij de fout in de aansluiting van het derde punt dezelfde is, de som van de vierkanten van de correctiën der hoeken in rechte reden toeneemt met het aantal driehoeken.

Deze toeneming is zeer ongunstig, want het is toch duidelijk dat, als het aantal driehoeken grooter wordt, men de sluitingsfout over een grooter aantal hoeken te verdeelen heeft; waardoor de veranderingen van die hoeken kleiner kunnen worden en de som van de vierkanten van die veranderingen dus in veel geringer mate zal behoeven toe te nemen. Het zal later blijken dat het mogelijk is, de aansluiting zoodanig te bewerkstelligen, dat genoemde som slechts het bedrag S bereikt, en dus met het grooter worden van het aantal driehoeken niet behoeft toe te nemen.

§ 5. Bij de berekening van het driehoeksnet heeft men de lengten der zijden of hare logarithmen, de hoeken met de y-as, de hoeken van de driehoeken en de *log. sin.* van deze hoeken noodig. Al deze grootheden ondergaan door de aansluiting zekere wijzigingen. Het is van belang deze wijzigingen te leeren kennen, om daardoor de elementen van het definitieve net te verkrijgen.

Men kan deze grootheden bepalen, door uit de definitieve coördinaten de lengten der lijnen en de hoeken met de y-as te berekenen en dan daaruit al de andere grootheden af te leiden.

Deze weg is echter zeer omslachtig, vooral omdat die berekening met groote nauwkeurigheid moet geschieden. Het is veel beter de kleine correctiën, die deze grootheden ondergaan, direct op te maken en dit kan door eene eenvoudige constructie.

Trekt men uit een punt a fig. 2 een cirkel met een straal gelijk aan:

$$100000\,\frac{s}{h}$$

eenheden (b. v. millimeters zoo als in fig. 2 of bij eene

kaart op grootere schaal: centimeters) en door het middelpunt eene lijn loodrecht op de aansluitingslijn AB van fig. 1, dan zal, als men door het snijpunt b van die lijn met den cirkel eene lijn bc trekt evenwijdig met de lijn, waarvan men de veranderingen wil onderzoeken (hier de lijn BN van fig. 1) en die wij onderstellen dat een hoek ψ met de y-as maakt, bc gelijk zijn aan:

$$200000 \frac{s}{h} \sin(\psi - \varphi).$$

Trekt men nu nog door het punt b eene lijn bd evenwijdig aan de richting, waarin het punt C moet verplaatst worden, dus onder een hoek σ met de y-as en de loodlijn be daarop; dan zal, als men uit c de twee loodlijnen op die twee lijnen neêrlaat, daarvan de stukken:

$$bf = 200000 \frac{s}{h} \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \sigma)$$

$$bg = 200000 \frac{s}{h} \sin(\psi - \varphi) \sin(\psi - \sigma)$$

worden afgesneden.

Vergelijkt men de eerste van deze uitdrukkingen met formule (6), dan vindt men:

$$bf = 200000\, V = 2 . 100000\, V;$$

bf stelt dus het dubbel van de betrekkelijke vergrooting voor, uitgedrukt in 100000ste deelen van de lengte. Brengt men dus op bd eene schaalverdeeling in dubbele eenheden aan dan leest men daarop onmiddellijk de vergrooting in honderdduizenste deelen der lengte af.

De verandering, die de logarithme van de zijde ondergaat, is gelijk aan $M.D$ waarin $M = 0{,}43429$ de modulus van de logarithmen voorstelt. Trekt men nu eene lijn bk, die met bd een hoek maakt, waarvan de secans $= \frac{5}{2} M = \frac{5}{2} \times 0{,}43429 =$ $= 1{,}085736$ is (deze hoek is $= 22^0 55' 20''$ en heeft tot tangens 0,42288) en verlengt de lijn cf tot in p, dan is:

$$bp = \frac{5}{2} M.\ 200000\, D = 5 \,.\, 100000\, MD,$$

dat is 5 maal de correctie van de logarithme in eenheden van de vijfde decimaal. Brengt men op bk eene schaalverdeeling aan met de vijfvoudige eenheid, dan leest men daarop onmiddellijk de correctie van de logarithme in eenheden van de 5de decimaal af.

Vergelijkt men de uitdrukking voor bg met formule (7), dan vindt men:

$$bg = - 200000\, D;$$

de verdraaiing is dus evenredig met bg. Wil men de verdraaiing in secunden kennen, dan moet men D met het getal 206265 vermenigvuldigen. Trekt men nu eene lijn bq, die met de lijn bc een hoek maakt, waarvan de secans $= \frac{206265}{200000} = 1{,}03132$ is (deze hoek is $= 14^{0}9'30''$ en heeft tot tangens 0,25225) en verlengt de lijn cg tot in r, dan is:

$$br = \frac{206265}{200000}\, bg = - 206265\, D,$$

dus gelijk aan het aantal secunden, dat de lijn verdraaid is. Door dus op bg eene schaalverdeeling in enkele eenheden aan te brengen, leest men daarop onmiddellijk de verdraaiing in secunden af.

Ter bepaling van de verandering, die een hoek ondergaat, bepaalt men op de aangegeven wijze de verdraaiingen van beide lijnen; het verschil geeft de gevraagde correctie van den hoek.

Ter bepaling van de correctie, die de *log. sin.* van den hoek ondergaat, merken wij op, dat de sinus van den hoek A_1 van een driehoek $A_1 A_2 A_3$ kan uitgedrukt worden door de formule:

$$\sin A_1 = \frac{2I}{a_2 a_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

als a_2 en a_3 de twee aanliggende zijden en I de inhoud van den driehoek voorstelt. Hieruit volgt:

$$log\ sin\ A_1 = log\ 2 + log\ I - log\ a_2 - log\ a_3$$

en dus:

$$\Delta\ log\ sin\ A_1 = \Delta\ log\ I - \Delta\ log\ a_2 - \Delta\ log\ a_3\ . \quad (12)$$

Daar nu alle inhouden de betrekkelijke vergrooting:

$$\frac{s}{h}\ sin\ (\sigma - \varphi)$$

ondergaan, zoo is in eenheden van de 5de decimaal:

$$\Delta\ log\ I = 100000\ M\ \frac{s}{h}\ sin\ (\sigma - \varphi)\ .\ .\ .\ .\ (13)$$

Stellen wij nu deze constante door K voor, dan gaat (12) over in:

$$\Delta\ log\ sin\ A_1 = K - \Delta\ log\ a_2 - \Delta\ log\ a_3\ .\ .\ (14)$$

Om de correctie voor den *log. sin.* van een hoek te vinden, heeft men dus slechts van de constante K de correctiën voor de logarithmen van de twee aangrenzende zijden af te trekken.

§ 6. In het in fig. 1 voorgestelde voorbeeld is, zoo als reeds vroeger is opgegeven, $\Delta_{xc} = 1{,}15$ en $\Delta_{yc} = 0{,}97$ meter, waaruit volgt met behulp van formule (1):

$$s = 1{,}5045 \quad \text{en} \quad \sigma = 49^0 51'.$$

De loodlijn uit C op AB neêrgelaten is $= 6725$ meter, waaruit volgt:

$$100000\ \frac{s}{h} = \frac{150450}{6725} = 22{,}37\ .$$

De lijn AB maakt met de y-as een hoek van $19^0 15'$ en hieruit volgt voor de constante K de waarde:

$$K = 100000\, M \frac{s}{h} \sin(\sigma - \varphi) = 4{,}95.$$

In fig. 2 is nu met 22,37 mM. als straal een cirkel beschreven en door het middelpunt a de lijn bab' loodrecht op AB van fig. 1 getrokken; en uit het snijpunt b van deze lijn met den cirkel is de lijn bd onder een hoek $\sigma = 49^0 51'$ met de y-as getrokken. Verder zijn getrokken de loodlijn be op deze lijn en de twee lijnen bk en bq onder de in de vorige paragraaf opgegeven hoeken. De lijnen bg, bd en bk zijn verdeeld respectievelijk met 1, 2 en 5 mM. als eenheid en daardoor is de hulpfiguur verkregen voor het bepalen van alle correctiën.

De lijn bc is getrokken evenwijdig met BN van fig. 1, en uit het snijpunt c de twee loodlijnen cfp en cgr; dezelfde constructie is uitgevoerd voor de twee andere zijden BL en LN van driehoek X *).

Door aflezing op de drie schalen verkrijgt men nu de volgende correctiën, waarbij tevens gevoegd zijn de waarden, die daarvoor door directe berekening gevonden zijn:

		Volgens fig 2.	Door berekening.
Betrekkelijke vergrootingen in 100000ste deelen:	LN	+ 7,7	+ 7,7
	BN	+15,2	+15,2
	BL	— 4,7	— 4,7
Correctiën voor de logarithmen in eenheden van de vijfde decimaal:	LN	+ 3,30	+ 3,34
	BN	+ 6,60	+ 6,60
	BL	— 2,05	— 2,04
Verdraaiingen der lijnen:	LN	+ 2″,9	+ 2″,8
	BN	—32″,0	—32″,1
	BL	—28″,7	—28″,6

*) Snijdt een van de lijnen, door b getrokken, den cirkel onder een te scherpen hoek, zoodat het snijpunt niet met juistheid te onderkennen is, dan kan men uit het punt b' eene lijn trekken *loodrecht* op de bedoelde lijn van het net, zooals dat in fig. 2 gedaan is voor de lijn LN van fig. 1.

Uit deze aflezingen vindt men verder door berekening:

Correctiën voor de hoeken:

B	$-28'',7$	$+32'',0$	$=+3'',3$	$+3'',4$
L	$+2'',9$	$+28'',7$	$=+31'',6$	$+31'',5$
N	$-32'',0$	$-2'',9$	$=+34'',9$	$+34'',9$

Correctiën voor de *log. sin.* der hoeken in eenheden van de 5de decimaal:

B	$4,95$	$-6,60+2,05$	$=+0,40$	$+0,39$
L	$4,95+2,05$	$-3,30$	$=+3,70$	$+3,64$
N	$4,95-3,30$	$-6,60$	$=-4,95$	$-4,97$

§ 7. Bij de vorige ontwikkeling is ondersteld, dat het net reeds aan twee punten, n.l. A en B, aangesloten was. Is dit niet het geval, moeten dus ook aan de coördinaten x_a y_a en x_b y_b van die punten de correctiën: Δx_a, Δy_a, Δx_b en Δy_b aangebracht worden, dan wordt de bepaling van de verschillende correctiën iets moeilijker.

Het is gemakkelijk in te zien, dat de formules voor de correctiën van de coördinaten gebracht kunnen worden onder den vorm:

$$\Delta x = p\,x - q\,y + r$$

$$\Delta y = p_1 x - q_1 y + r_1$$

waaruit blijkt, dat die twee correctiën evenredig zijn met de afstanden tot twee verschillende lijnen, die niet meer samenvallen met eene van de zijden van den aansluitingsdriehoek. Die correctiën kunnen op dergelijke wijze gevonden worden als in § 2 is uiteengezet, nadat men de twee bedoelde lijnen getrokken heeft.

De formules voor de vergrootingen en de verdraaiingen der zijden en voor de correctiën van de logarithmen der zijden, van de hoeken en van de *log. sin.* der hoeken, kunnen uit bovenstaande formules gemakkelijk worden opgemaakt. Eenige daarvan bevatten een constanten term meer en de daarin voorkomende hoeken hangen niet op zoo eenvoudige wijze samen met den driehoek. Het gevolg daarvan is, eene kleine

wijziging in de meetkunstige bepaling van de verschillende correctiën.

Wij zullen de ontwikkelingen voor dit meer algemeene geval hier niet voortzetten, omdat het ons omtrent de waarde van de methode niets verder kan leeren, maar besluiten met het vermelden van de waarden van de zes constanten, die in bovenstaande formules voorkomen; deze zijn:

$$p = \frac{1}{2I}\{\Delta_{xa}(y_c - y_b) + \Delta_{xb}(y_a - y_c) + \Delta_{xc}(y_b - y_a)\}$$

$$q = \frac{1}{2I}\{\Delta_{xa}(x_c - x_b) + \Delta_{xb}(x_a - x_c) + \Delta_{xc}(x_b - x_a)\}$$

$$r = \frac{1}{2I}\{\Delta_{xa}(x_c y_b - x_b y_c) + \Delta_{xb}(x_a y_c - x_c y_a) + \Delta_{xc}(x_b y_a - x_a y_b)\}$$

$$p_1 = \frac{1}{2I}\{\Delta_{ya}(y_c - y_b) + \Delta_{yb}(y_a - y_c) + \Delta_{yc}(y_b - y_a)\}$$

$$q_1 = \frac{1}{2I}\{\Delta_{ya}(x_c - x_b) + \Delta_{yb}(x_a - x_c) + \Delta_{yc}(x_b - x_a)\}$$

$$r_1 = \frac{1}{2I}\{\Delta_{ya}(x_c y_b - x_b y_c) + \Delta_{yb}(x_a y_c - x_c y_a) + \Delta_{yc}(x_b y_a - x_a y_b)\}$$

waarin:

$$2I = x_c\, y_b - x_b\, y_c + x_a\, y_c - x_c\, y_a + x_b\, y_a - x_a\, y_b$$

het dubbel van den inhoud van den aansluitingsdriehoek voorstelt.

§ 8. Wij zullen thans eene nieuwe methode ontwikkelen voor de aansluiting van een net van lagere orde aan een net van hoogere orde, waarbij de hoeken van het net veel geringere wijzigingen ondergaan. Deze methode, die zich, zooals in § 1 reeds werd opgemerkt, grondt op de theorie van de conforme overbrenging en die wij daarom zullen bestempelen met den naam van de *methode der conforme overbrenging*, berust op de volgende redeneering. Brengt men de verschillende punten van eene figuur, die door de rechthoe-

kige coördinaten $x\,y$ gegeven zijn, in een ander rechthoekig coördinatenstelsel $X\,Y$ door middel van de formule:

$$Y + X\sqrt{-1} = f(y + x\sqrt{-1}) \ldots\ldots (15)$$

over, dan bestaat er gelijkvormigheid in de kleinste deelen van beide figuren. De hoeken worden dus op deze wijze onveranderd overgebracht en daardoor hebben wij dus eene methode voor de aansluiting, waarbij de hoeken in het geheel niet veranderd worden.

Bij deze overbrenging gaan echter de rechte lijnen $A_1 A_2$ en $A_1 A_3$ fig. 5 in de kromme lijnen $A_1' A_2'$ en $A_1' A_3'$ over. Het is de hoek tusschen de raaklijnen aan beide kromme lijnen in het punt A_1', die gelijk is aan hoek $A_2 A_1 A_3$.

Daar nu de zijden van de driehoeken na de aansluiting wederom rechte lijnen moeten zijn, zoo kunnen wij alleen de driehoekspunten, volgens bovenstaande formule, overbrengen, en moeten deze dan door rechte lijnen vereenigen; in plaats van de kromme lijnen $A_1' A_2'$ en $A_1' A_3'$ moeten wij dus de koorden nemen. Hierdoor ondergaan de hoeken kleine veranderingen, en wel veranderingen gelijk aan het verschil van de hoeken tusschen de raaklijnen en de koorden van beide lijnen.

Het is verder duidelijk dat, als wij de driehoeken kleiner nemen, bijvoorbeeld $A_1 B_2 B_3$ in plaats van $A_1 A_2 A_3$, de hoeken tusschen de raaklijnen en de koorden kleiner zullen worden en dus in het algemeen ook hunne verschillen. Daar deze hoeken bij de grens $A_1 B_2 = 0$, $A_1 B_3 = 0$, nul worden, zoo mogen wij verwachten dat, bij de toepassing van bovenstaande formule, de hoeken, vooral bij kleine driehoeken, slechts geringe wijzigingen zullen ondergaan.

Uit bovenstaande formule volgt nu gemakkelijk dat ook de uitdrukking: $\Delta_y + \Delta_x \sqrt{-1}$ eene functie zal zijn van $(y + x\sqrt{-1})$ en het komt er nu slechts op aan voor die formule eene keuze te doen. Bij die keuze hebben wij er op te letten, dat voor de correctiën Δ_x en Δ_y eenvoudige formules gevonden moeten worden, wil men niet in ingewikkelde berekeningen vervallen. Wij hebben daarom eene para-

bolische functie gekozen en aangezien wij aan *drie* punten willen aansluiten en dus aan *zes* voorwaarden moeten voldoen, zoo moet die functie minstens *zes* constanten bevatten; waaruit volgt, dat die functie minstens van den tweeden graad moet zijn.

Wij stellen dus:

$$\Delta_y + \Delta_x\sqrt{-1} = (A_2 + A_1\sqrt{-1}) + (B_2 + B_1\sqrt{-1})(y + x\sqrt{-1}) + \\ + (C_2 + C_1\sqrt{-1})(y + x\sqrt{-1})^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

waaruit onmiddellijk door ontwikkeling volgt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= A_1 + B_2 x + B_1 y + C_1(y^2 - x^2) + 2\,C_2 x y \\ \Delta_y &= A_2 + B_2 y - B_1 x + C_2(y^2 - x^2) - 2\,C_1 x y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (17)$$

waarin A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 de zes constanten voorstellen.

Het zijn deze formules, die wij aan onze methode ten grondslag leggen, en waarop onze verdere beschouwingen gegrond zijn.

§ 9. In de eerste plaats merken wij op, dat bovenstaande formules nog eene aanmerkelijke vereenvoudiging kunnen ondergaan door het doen van eene geschikte keuze voor den oorsprong van het coördinatenstelsel. Het is daardoor mogelijk de termen van de eerste macht te verdrijven.

Stellen wij de coördinaten van den oorsprong van het nieuwe coördinatenstelsel door $x_0\,y_0$ voor en de coördinaten ten opzichte van dit nieuwe stelsel door $x'\,y'$, dan is

$$x = x' + x_0\,, \qquad y = y' + y_0\,,$$

waardoor bovenstaande formules overgaan in:

$$\Delta_x = A_1 + B_2(x' + x_0) + B_1(y' + y_0) + \\ + C_1\{(y' + y_0)^2 - (x' + x_0)^2\} + 2\,C_2(x' + x_0)(y' + y_0)$$

$$\Delta_y = A_2 + B_2(y' + y_0) - B_1(x' + x_0) + \\ + C_2\{(y' + y_0)^2 - (x' + x_0)^2\} - 2\,C_1(x' + x_0)(y' + y_0)$$

of na ontwikkeling:

$$\Delta_x = A_1 + B_2 x_0 + B_1 y_0 + C_1 (y_0^2 - x_0^2) + 2 C_2 x_0 y_0 + \\ + (B_2 - 2 C_1 x_0 + 2 C_2 y_0) x' + (B_1 + 2 C_1 y_0 + 2 C_2 x_0) y' + \\ + C_1 (y'^2 - x'^2) + 2 C_2 x' y'$$

$$\Delta_y = A_2 + B_2 y_0 - B_1 x_0 + C_2 (y_0^2 - x_0^2) - 2 C_1 x_0 y_0 + \\ + (B_2 - 2 C_1 x_0 + 2 C_2 y_0) y' - (B_1 + 2 C_1 y_0 + 2 C_2 x_0) x' + \\ + C_2 (y'^2 - x'^2) - 2 C_1 x' y'.$$

Stellen wij nu hierin de coëfficiënten van x' en y' gelijk nul, dan vinden wij door oplossing:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{2 (C_1^2 + C_2^2)} \\ y_0 &= \frac{-C_2 B_2 - C_1 B_1}{2 (C_1^2 + C_2^2)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (18)$$

Stellen wij nu nog:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + B_2 x_0 + B_1 y_0 + C_1 (y_0^2 - x_0^2) + 2 C_2 x_0 y_0 = \\ = A_1 + C_1 \frac{B_2^2 - B_1^2}{4 (C_1^2 + C^2_2)} - C_2 \frac{2 B_1 B_2}{4 (C_1^2 + C_2^2)} = A_1' \\ A_2 + B_2 y_0 - B_1 x_0 + C_2 (y_0^2 - x_0^2) - 2 C_1 x_0 y_0 = \\ = A_2 - C_2 \frac{B_2^2 - B_1^2}{4 (C_1^2 + C_2^2)} - C_1 \frac{2 B_1 B_2}{4 (C_1^2 + C_2^2)} = A_2' \end{aligned}\right\} \ldots (19)$$

dan gaan de formules voor de correctiën Δ_x en Δ_y over in:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= A_1' + C_1 (y'^2 - x'^2) + 2 C_2 x' y' \\ \Delta_y &= A_2' + C_2 (y'^2 - x'^2) - 2 C_1 x' y' \end{aligned}\right\} \ldots (20)$$

Stelt men verder:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= - C \sin 2\gamma \\ C_2 &= + C \cos 2\gamma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (21)$$

en

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= + B \sin \beta \\ B_2 &= - B \cos \beta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (22)$$

dan gaan de formules voor de berekening van x_0, y_0, A_1' en A_2' over in:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{B}{2C} \sin(2\gamma - \beta) \\ y_0 &= \frac{B}{2C} \cos(2\gamma - \beta) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (23)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= A_1 - \frac{B^2}{4C} \sin(2\gamma - 2\beta) \\ A_2' &= A_2 - \frac{B^2}{4C} \cos(2\gamma - 2\beta) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (24)$$

die voor de berekening veel gemakkelijker zijn.

§ 10. Beschouwen wij wederom het geval dat het driehoeksnet aangesloten is aan de zijde AB fig. 6 en dat de coördinaten van C nog de correctiën:

$$\Delta_{xc} = s \sin\sigma \qquad \Delta_{yc} = s \cos\sigma \ldots\ldots (25)$$

moeten ondergaan.

Stellen wij de lengten van de drie zijden van den aansluitingsdriehoek, in het net van lagere orde, door a, b en c en de hoeken door A, B en C voor; stellen wij verder den hoek, dien de lijn AB met de y-as maakt, gelijk φ en nemen wij den oorsprong van het coördinatenstelsel $x'y'$ in het punt M midden tusschen A en B aan, dan is voor A:

$$x' = -\tfrac{1}{2} c \sin\varphi$$

$$y' = -\tfrac{1}{2} c \cos\varphi$$

en dus:

$$y'^2 - x'^2 = \tfrac{1}{4} c^2 \cos 2\varphi$$

$$2x'y' = \tfrac{1}{4} c^2 \sin 2\varphi .$$

Voor B:

$$x' = \tfrac{1}{2}\, c \sin \varphi$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\, c \cos \varphi\,,$$

en dus eveneens:

$$y'^2 - x'^2 = \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\varphi$$

$$2\, x' y' = \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\varphi$$

en voor C:

$$x' = \tfrac{1}{2}\, c \sin \varphi + a \sin(\varphi + 180^0 - B) = \tfrac{1}{2}\, c \sin \varphi - a \sin(\varphi - B)$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\, c \cos \varphi + a \cos(\varphi + 180^0 - B) + \tfrac{1}{2}\, c \cos \varphi - a \cos(\varphi - B)$$

waaruit volgt:

$$y'^2 - x'^2 = \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\varphi - a\, c \cos(2\varphi - B) + a^2 \cos(2\varphi - 2B)$$

$$= \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\varphi - a\{c \cos(2\varphi - B) - a \cos(2\varphi - 2B)\}$$

$$2\, x' y' = \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\varphi - a\, c \sin(2\varphi - B) + a^2 \sin(2\varphi - 2B)$$

$$= \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\varphi - a\{c \sin(2\varphi - B) - a \sin(2\varphi - 2B)\}$$

of als wij de zijden a en c, die tusschen de haakjes { } voorkomen, uitdrukken in de zijde b, dan komt er na eene eenvoudige herleiding:

$$y'^2 - x'^2 = \tfrac{1}{4}\, c^2 \cos 2\varphi - a\, b \cos(2\varphi - B + A)$$

$$2\, x' y' = \tfrac{1}{4}\, c^2 \sin 2\varphi - a\, b \sin(2\varphi - B + A)\,.$$

Substituëren wij nu bovenstaande waarden voor de coördinaten van A en van B in de vergelijkingen (20) dan vinden wij:

$$0 = A_1 - \tfrac{1}{2} B_2 c \sin\varphi - \tfrac{1}{2} B_1 c \cos\varphi + \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \cos 2\varphi + \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \sin 2\varphi$$

$$0 = A_1 + \tfrac{1}{2} B_2 c \sin\varphi + \tfrac{1}{2} B_1 c \cos\varphi + \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \cos 2\varphi + \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \sin 2\varphi$$

$$0 = A_2 - \tfrac{1}{2} B_2 c \cos\varphi + \tfrac{1}{2} B_1 c \sin\varphi + \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \cos 2\varphi - \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \sin 2\varphi$$

$$0 = A_2 + \tfrac{1}{2} B_2 c \cos\varphi - \tfrac{1}{2} B_1 c \sin\varphi + \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \cos 2\varphi - \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \sin 2\varphi .$$

Door deze vergelijkingen twee aan twee van elkaar af te trekken vinden wij:

$$B_2 \sin\varphi + B_1 \cos\varphi = 0$$

$$B_2 \cos\varphi - B_1 \sin\varphi = 0$$

waaruit volgt:

$$B_1 = 0 \text{ en } B_2 = 0 .$$

Hieruit blijkt dus, dat het in de vorige paragraaf bedoelde punt, waarvan de coördinaten zijn x_0 en y_0, gelegen is in het punt M midden tusschen A en B. De twee constanten A_1 en A_2 gaan daardoor over in de constanten A'_1 en A'_2 van de formules (19) en hiervoor vinden wij uit de vorige vergelijkingen:

$$A'_1 = - \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \cos 2\varphi - \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \sin 2\varphi$$

$$A'_2 = - \tfrac{1}{4} C_2 c^2 \sin 2\varphi + \tfrac{1}{4} C_1 c^2 \sin 2\varphi$$

of, als wij voor C_1 en C_2 de uitdrukkingen volgens formule (21) nemen, namelijk:

$$C_1 = - C \sin 2\gamma$$

$$C_2 = + C \cos 2\gamma ,$$

dan gaan A_1' en A_2' over in:

$$\left.\begin{aligned} A_1' &= -\tfrac{1}{4} C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) \\ A_2' &= -\tfrac{1}{4} C c^2 \cos(2\varphi - 2\gamma) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (26)$$

Passen wij nu de formules (20) toe op het punt C en nemen voor A'_1, A'_2, C_1 en C_2 bovenstaande waarden (26) en (21) dan vinden wij:

$$\Delta_{xc} = s \sin\sigma = -\tfrac{1}{4} C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) + \tfrac{1}{4} C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) - $$
$$- C ab \sin(2\varphi - B + A - 2\gamma) = - C ab \sin(2\varphi - B + A - 2\gamma)$$

$$\Delta_{yc} = s \cos\sigma = -\tfrac{1}{4} C c^2 \cos(2\varphi - 2\gamma) + \tfrac{1}{4} C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) -$$
$$- C ab \cos(2\varphi - B + A - 2\gamma) = - C ab \cos(2\varphi - B + A - 2\gamma)$$

waaruit volgt:

$$s = C ab$$

en:

$$\sigma = 180^0 + 2\varphi - 2\gamma - B + A$$

zoodat wij dus ten slotte voor onze constanten vinden de volgende eenvoudige uitdrukkingen:

$$C = \frac{s}{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$\gamma = 90^0 + \varphi - \frac{\sigma + B - A}{2} \ldots\ldots (28)$$

$$\left.\begin{aligned} A'_1 &= -\tfrac{1}{4} C c^2 \sin(2\varphi - 2\gamma) = \frac{s c^2}{4 ab} \sin(\sigma + B - A) \\ A'_2 &= -\tfrac{1}{4} C c^2 \cos(2\varphi - 2\gamma) = \frac{s c^2}{4 ab} \cos(\sigma + B - A) \end{aligned}\right\} \ldots (29)$$

§ 11. Voor de berekening van de correctiën voor de coördinaten hebben wij de formules (20) gevonden; deze kunnen nog vereenvoudigd worden. Stellen wij namelijk de voerstraal MR van een willekeurig punt R fig. 8 door ϱ en de hoek, dien zij met de y-as maakt, door θ voor, dan is:

$$x' = \varrho \sin\theta \qquad y' = \varrho \cos\theta .$$

Substitueeren wij deze waarden in (20) en vervangen C_1 en C_2 door hunne waarden uit (21) dan vinden wij:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= A_1' + C\varrho^2 \sin 2(\theta-\gamma) \\ \Delta_y &= A_2' + C\varrho^2 \cos 2(\theta-\gamma) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (30)$$

Deze formules zijn zeer geschikt voor de directe berekening van de correctiën, indien men eerst de waarden van ϱ en θ berekent uit:

$$\varrho \sin\theta = x' = x - x_0$$
$$\varrho \cos\theta = y' = y - y_0$$

waarin x_0 en y_0 de gemiddelden zijn van de coördinaten van A en B.

Die formules geven ook aanleiding tot eene eenvoudige constructie van de correctiën op eene triangulatie-kaart, geconstrueerd met de voorloopige coördinaten. Het meest doelmatige is echter, van uit de kaart enkele afstanden op te meten en daaruit de correctiën te berekenen. Door eene kleine vervorming kan men die formules namelijk onder zoodanigen vorm brengen, dat die berekening zeer eenvoudig wordt.

Voor die formules kunnen wij namelijk schrijven:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= A_1' + C\varrho^2 \sin(2\theta-2\gamma) = A_1' + C\varrho^2 \cos(2\theta-2\gamma-90^0) = \\ &= A_1' + C^2\varrho^2 \{\cos^2(\theta-\gamma-45^0) - \sin^2(\theta-\gamma-45^0)\} = \\ &= A_1' + C^2\{\varrho^2 \sin^2(\theta-\gamma+45^0) - \varrho^2 \sin^2(\theta-\gamma-45^0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= A_2' + C\varrho^2 \cos(2\theta-2\gamma) = A_2' + C\varrho^2\{\cos^2(\theta-\gamma) - \sin^2(\theta-\gamma)\} = \\ &= A_2' + C\{\varrho^2 \sin^2(\theta-\gamma-90^0) - \varrho^2 \sin^2(\theta-\gamma)\}. \end{aligned}$$

De in deze formules voorkomende grootheden: $\varrho \sin(\theta-\gamma+45^0)$,

$\varrho \sin(\theta-\gamma)$, $\varrho \sin(\theta-\gamma-45^0)$ en $\varrho \sin(\theta-\gamma-90^0)$ zijn respectievelijk gelijk aan de afstanden van het punt R tot vier lijnen door M getrokken, die met de y-as de hoeken $\gamma-45^0$, γ, $\gamma+45^0$ en $\gamma+90^0$ maken.

Trekken wij nu op de triangulatie-kaart, die geteekend is op de schaal $1:m$, de vier lijnen U_1, V_2, V_1 en U_2 door het punt M onder de boven aangegeven hoeken en meten wij de afstanden u_1, v_2, v_1 en u_2 van het punt R tot aan die lijnen, dan is

$$\begin{aligned} \varrho \sin(\theta-\gamma+45^0) &= m\,u_1 \\ \varrho \sin(\theta-\gamma-45^0) &= m\,v_1 \\ \varrho \sin(\theta-\gamma-90^0) &= m\,u_2 \\ \varrho \sin(\theta-\gamma) &= m\,v_2 \end{aligned}$$

waardoor de formules voor de correctiën Δ_x en Δ_y overgaan in:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= A_1' + C m^2 (u_1^2 - v_1^2) \\ \Delta_y &= A_2' + C m^2 (u_2^2 - v_2^2) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (31)$$

Voor de berekening volgens deze formules heeft men slechts eene kleine quadratentafel noodig. De vermenigvuldiging met den factor $Cm^2 = \frac{s\,m^2}{a\,b}$ geschiedt het eenvoudigst als men vooraf een klein tabelletje opmaakt van de veelvouden van dien factor.

In de volgende paragraaf wordt een voorbeeld van deze berekening gegeven, waardoor de eenvoudigheid daarvan nader blijkt.

Men zou des noods kunnen volstaan met het meten van twee afstanden, hetzij U_1 en V_1, hetzij V_2 en U_2; men kan namelijk gemakkelijk de volgende twee formules aantoonen:

$$\Delta_x = A_1' + 2\,C m^2\,U_2\,V_2, \qquad \Delta_y = A_2' + 2\,C m^2\,U_1\,V_1$$

Deze zijn echter voor de berekening minder geschikt, vooral omdat men daarbij de teekens van de afstanden $U_1\,V_1$ enz. moet in aanmerking nemen, hetgeen bij de vorige formules niet noodig is.

§ 12. In figuur 12 is hetzelfde voorbeeld genomen als in fig. 1. De triangulatie-kaart is geteekend op de schaal 1 à 50000 (dus $m = 50000$). De zijden en de hoeken van den aansluitingsdriehoek zijn:

$$a = 6768 \text{ meter} \qquad A = 51^0 15'$$
$$b = 8623 \text{ »} \qquad B = 83^0 32'$$
$$c = 6159 \text{ »} \qquad C = 45^0 13'.$$

De zijde $AB = c$ maakt met de y-as den hoek $\varphi = 19^0 15'$. De correctiën voor het punt C zijn $\Delta_{xc} = 1{,}15$ en $\Delta_{yc} = 0{,}97$ meter, waaruit volgt:

$$s = 1{,}5045 \qquad \sigma = 49^0 51'.$$

Hieruit volgt:

$$\sigma + B - A = 49^0 51' + 83^0 32' - 51^0 15' = 82^0 8'$$

$$\gamma = 90^0 + \varphi - \frac{\sigma + B - A}{2} = 90^0 + 19^0 15' - 41^0 4' = 68^0 11'$$

en als wij den *centimeter* als eenheid nemen, hetgeen voor het meten op de kaart gemakkelijker is dan den meter:

$$A_1' = \frac{s c^2}{4 ab} \sin(\sigma + B - A) = 24{,}22$$

$$A_2' = \frac{s c^2}{4 ab} \cos(\sigma + B - A) = 3{,}35$$

$$Cm^2 = \frac{s m^2}{ab} = 0{,}64447.$$

Van deze laatste waarde maken wij het volgende tabelletje van veelvouden op:

1.	0,644
2.	1,289
3.	1,933
4.	2,578
5.	3,222
6.	3,867
7.	4,511
8.	5,156
9.	5,800.

In figuur 12 zijn nu de vier bedoelde lijnen getrokken en door meting vinden wij daarin voor het punt R: $u_1 = 7{,}3$, $v_1 = 3{,}8$, $u_2 = 7{,}8$, $v_2 = 2{,}5$ en hiermede wordt de berekening van de correctiën voor dat punt, uitgedrukt in centimeters, nu als volgt:

u_1^2	$= 53$	A_1'	$= 24{,}2$
v_1^2	$= 14$	$30\ Cm^2$	$= 19{,}3$
Verschil	$= 39$	$9\ Cm^2$	$= 5{,}8$
			$49 = \Delta_x$
u_2^2	$= 61$	A_2'	$= 3{,}3$
v_2^2	$= 6$	$50\ Cm^2$	$= 32{,}2$
Verschil	$= 55$	$5\ Cm^2$	$= 3{,}2$
			$39 = \Delta_y$

De figuur 12 op de schaal van 1 à 50000 is ruimschoots voldoende voor de berekening van alle correctiën tot in centimeters nauwkeurig en dit is alles wat voor de praktijk noodig is. Teekent men de kaart op de schaal van 1 à 10000, dan kan men de correctiën gemakkelijk tot in millimeters vinden.

Het teekenen van de lijnen $U_1\ V_1\ U_2\ V_2$ kan gemakkelijk geschieden als men het stuk berekent, dat een van die lijnen van de zijden $A\ C$ of $B\ C$ afsnijdt. Dit stuk is onmiddellijk te vinden uit een driehoek, waarvan de basis ($^1/_3$ c.) en de twee aanliggende hoeken bekend zijn.

§ 13. Gaan wij thans over tot het onderzoek van de vervormingen, die het net ondergaat tengevolge van de aansluiting. Voor de vergrooting en de verdraaiing, die de lijn $A_1\ A_2$ fig. 7 ondergaat, vinden wij volgens de formules (3) en (4), als wij daarin de waarden van $\Delta x_1\ \Delta y_1\ \Delta x_2\ \Delta y_2$ uit (20) overbrengen, en in aanmerking nemen dat:

$$\frac{\sin\psi}{l} = \frac{l\sin\psi}{l^2} = \frac{x_2' - x_1'}{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$

$$\frac{\cos\psi}{l} = \frac{l\cos\psi}{l^2} = \frac{y_2' - y_1'}{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$

is:

$$V = -C_1(x_2' + x_1') + C_2(y_2' + y_1') \quad \ldots \quad (32)$$

en

$$D = C_1(y_2' + y_1') + C_2(x_2' + x_1'), \quad \ldots \quad (33$$

of als wij voor C_1 en C_2 de waarden uit (21) invoeren en den voerstraal MB, gaande naar het midden van A_1A_2, door r en den hoek, dien hij met de y'-as maakt, door ω voorstellen:

$$V = 2Cr\cos(\omega - 2\gamma) \quad \ldots \quad (34)$$

$$D = 2Cr\sin(\omega - 2\gamma) \quad \ldots \quad (35)$$

Uit deze formules blijkt dat de vergrooting en de verdraaiing, die een lijn ondergaat, onafhankelijk zijn van de richting dier lijn, maar alleen afhangen van de plaats van het middelpunt dier lijn. Die twee grootheden blijken verder evenredig te zijn met de afstanden tot twee lijnen door het punt M, die respectievelijk met de y-as de hoeken $2\gamma + 90^0$ en 2γ maken. Trekken wij dus de lijnen Mf en Mg respectievelijk onder de hoeken $y'Mf = 2\gamma$ en $y'Mg = 2\gamma + 90^0$ en laten uit B daarop de twee loodlijnen Bk en Bl neer, dan wordt de vergrooting van de lijn A_1A_2 gemeten door Mk en de verdraaiing door Ml.

Voor de verandering, die de hoek $A_2A_1A_3$ fig. 8 ondergaat, vinden wij op dezelfde wijze als in § 3 uit form. (33):

$$\delta = D_3 - D_2 = C_1(y_3' - y_2') + C_2(x_3' - x_2') \quad \ldots \quad (36)$$

of, als wij de lengte van de lijn A_2A_3 door l en den hoek, dien zij met de y-as maakt, door ψ voorstellen en voor C_1 en C_2 de waarden (21) invoeren:

$$\delta = Cl\sin(\psi - 2\gamma) = Cl\cos(\psi - 2\gamma - 90^0) \quad \ldots \quad (37)$$

Dat wil zeggen, dat de hoek $A_2A_1A_3$ van den driehoek $A_1A_2A_3$ eene verandering ondergaat, evenredig met de projectie n_2n_3 van de overstaande zijde A_2A_3 op de lijn Mg, die een hoek $2\gamma + 90^0$ met de y-as maakt. Doorloopen wij die overstaande zijde, van uit het hoekpunt gezien, in de

richting van de positieve y-as naar de positieve x-as en heeft die lijn eene positieve projectie op de lijn Mg, dan wordt de hoek grooter; heeft zij eene negatieve projectie op de lijn Mg, dan wordt de hoek kleiner.

Uit (37) blijkt verder dat, als men de zijden van den driehoek kleiner neemt, de correctiën van de hoeken ook kleiner worden, waardoor het in § 8 medegedeelde nader bevestigd wordt.

Hebben wij een centraal punt A_1 fig. 9 waaromheen eene reeks driehoeken liggen, die samen een convexen veelhoek vormen en trekken wij uit de uiterste punten loodlijnen op Mg, dus uit A_2 en A_5, dan wordt het eene gedeelte der hoeken om A_1 grooter (n.l. de hoeken 2, 3 en 4), terwijl het andere gedeelte der hoeken (5, 6, 7 en 8) kleiner wordt.

§ 14. Beschouwen wij het regelmatige net in fig. 10 voorgesteld, dan hebben de zijden van de kleine driehoeken, die denzelfden stand hebben, als de groote driehoek, eene n malen kleinere projectie dan de overeenkomstige zijden van den grooten driehoek; de hoeken daarvan ondergaan dus eene n malen kleinere verandering dan de overeenkomstige hoeken van den aansluitingsdriehoek. Heeft dus de aansluitingsdriehoek voor de som van de vierkanten van de correctiën der hoeken eene waarde S, dan is de som van de vierkanten van de correctiën der hoeken voor een kleinen driehoek $\frac{S}{n^2}$. De driehoeken, die den omgekeerden stand van den driehoek $A\,B\,C$ hebben, hebben voor de projecties der zijden dezelfde waarden, maar met het omgekeerde teeken; de hoeken van die driehoeken ondergaan dus dezelfde correctiën, maar met omgekeerd teeken; de som van de vierkanten van de correctiën van die hoeken is dus ook $\frac{S}{n^2}$ en voor de som van de correctiën van de hoeken van alle driehoeken vinden wij dus:

$$n^2 . \frac{S}{n^2} = S$$

dus onafhankelijk van het aantal driehoeken.

Wij zien dus hieruit dat bij deze methode de aansluiting van het driehoeksnet van fig. 10 verkregen wordt met eene som van de vierkanten van de correctiën der hoeken, die n^2 malen kleiner is dan bij de vroeger beschreven methode van de parallelle verschuiving.

Er is echter meer. Bij het eenvoudige net, dat hier bedoeld wordt, wordt de aansluiting verkregen door aan de hoeken zoo kleine wijzigingen aan te brengen, dat de som van de vierkanten van die wijzigingen een minimum is.

Om dit te bewijzen zal het voldoende zijn aan te toonen, dat, als men na de aansluiting, aan een willekeurig punt, met uitzondering natuurlijk van de 3 aansluitingspunten, eene kleine verplaatsing geeft, de bedoelde som daardoor steeds grooter wordt. Is nu δ de verandering, die een van de hoeken ondergaat tengevolge van de aansluiting van het net volgens de beschreven methode, en $p\,\Delta_x + q\,\Delta_y$ de verandering, die diezelfde hoek ondergaat tengevolge van eene kleine verplaatsing van een willekeurig punt, dan gaat de som van de vierkanten dier veranderingen over in:

$$\Sigma(\delta+p\Delta_x+q\Delta_y)^2=\Sigma\,\delta^2+2\Delta_x\Sigma p\,\delta+2\Delta_y\Sigma\,q\,\delta+\Sigma(p\Delta_x+q\Delta_y)^2$$

Zal $\Sigma\,\delta^2$ nu werkelijk een minimum zijn, dan moeten $\Sigma\,p\,\delta$ en $\Sigma\,q\,\delta$ gelijk nul zijn.

Kiezen wij nu in de eerste plaats een willekeurig punt in het inwendige van het net en geven wij daaraan de verplaatsingen Δ_x en Δ_y, dan zullen daardoor alleen veranderen de hoeken van de zes driehoeken om dat punt gelegen, die in fig. 11 afzonderlijk zijn voorgesteld, zoodat het dus alleen noodig is voor de 18 daarin voorkomende hoeken de produkten $p\,\delta$ en $q\,\delta$ op te maken.

Nemen wij daarbij de y-as evenwijdig aan de lijn AB van den aansluitingsdriehoek en stellen wij de projecties van de aan AC en BC evenwijdige zijden van de kleine driehoekjes, op die as respectievelijk door a en b voor en de hoogte van een dergelijk driehoekje door h, dan geeft onderstaande staat voor iederen hoek de grootheden δ, p en q en de producten $p\,\delta$ en $q\,\delta$.

		δ	p	q	$p\delta$	$q\delta$
I.	1.	$-C_1 b + C_2 h$	$-\frac{a}{a^2+h^2}+\frac{1}{a+b}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{a^2+h^2}-C_1\frac{b}{a+b}-C_2\frac{ah}{a^2+h^2}+C_2\frac{h}{a+b}$	$-C_1\frac{bh}{a^2+h^2}+C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$-C_1 a - C_2 h$	$-\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{a}{a+b}+C_2\frac{h}{a+b}$	0
	3.	$C_1(a+b)$	$\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{-h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}$
II.	1.	$C_1 b - C_2 h$	$-\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{a^2+h^2}+C_2\frac{ah}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{bh}{a^2+h^2}-C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$C_1 a + C_2 h$	$-\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{b^2+h^2}-C_2\frac{bh}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ah}{b^2+h^2}-C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$-C_1(a+b)$	$\frac{a}{a^2+h^2}+\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}+\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}-C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}-C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$
III.	1.	$-C_1 b + C_2 h$	$-\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{b}{a+b}-C_2\frac{h}{a+b}$	0
	2.	$-C_1 a - C_2 h$	$-\frac{b}{b^2+h^2}+\frac{1}{a+b}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{b^2+h^2}-C_1\frac{a}{a+b}+C_2\frac{bh}{b^2+h^2}-C_2\frac{h}{a+b}$	$C_1\frac{ah}{b^2+h^2}+C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$C_1(a+b)$	$+\frac{b}{b^2+h^2}$	$+\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$

		δ	p	q	$p\delta$	$q\delta$
IV.	1.	$C_1 b - C_2 h$	$\frac{a}{a^2+h^2} - \frac{1}{a+b}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{a^2+h^2} - C_1\frac{b}{a+b} - C_2\frac{ah}{a^2+h^2} + C_2\frac{h}{a+b}$	$-C_1\frac{bh}{a^2+h^2} + C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$C_1 a + C_2 h$	$+\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{a}{a+b} + C_2\frac{h}{a+b}$	0
	3.	$-C_1(a+b)$	$-\frac{a}{a^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2}$	$C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2}$
V.	1.	$-C_1 b + C_2 h$	$\frac{a}{a^2+h^2}$	$-\frac{h}{a^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{a^2+h^2} + C_2\frac{ah}{a^2+h^2}$	$+C_1\frac{bh}{a^2+h^2} - C_2\frac{h^2}{a^2+h^2}$
	2.	$-C_1 a - C_2 h$	$\frac{b}{b^2+h^2}$	$\frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ab}{b^2+h^2} - C_2\frac{bh}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{ah}{b^2+h^2} - C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$C_1(a+b)$	$-\frac{a}{a^2+h^2} - \frac{b}{b^2+h^2}$	$\frac{h}{a^2+h^2} - \frac{h}{b^2+h^2}$	$-C_1\frac{a(a+b)}{a^2+h^2} - C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{a^2+h^2} - C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$
VI.	1.	$C_1 b - C_2 h$	$\frac{1}{a+b}$	0	$C_1\frac{b}{a+b} - C_2\frac{h}{a+b}$	0
	2.	$C_1 a + C_2 h$	$\frac{b}{b^2+h^2} - \frac{1}{a+b}$	$\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{ab}{b^2+h^2} + C_2\frac{bh}{b^2+h^2} - C_1\frac{a}{a+b} - C_2\frac{h}{a+b}$	$C_1\frac{ah}{b^2+h^2} + C_2\frac{h^2}{b^2+h^2}$
	3.	$-C_1(a+b)$	$-\frac{b}{b^2+h^2}$	$-\frac{h}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{b(a+b)}{b^2+h^2}$	$C_1\frac{h(a+b)}{b^2+h^2}$

Telt men nu de twee laatste kolommen samen, dan vindt men, dat werkelijk $\Sigma p\delta$ en $\Sigma q\delta$ gelijk nul zijn en dus eene kleine verplaatsing van een der punten, in het binnenste van het net gelegen, de som van de vierkanten van de veranderingen steeds doet toenemen.

Er blijven nu nog over de driehoekspunten, gelegen op de lijnen AB, BC en CA van den aansluitingsdriehoek; eene verplaatsing van een dier punten brengt slechts veranderingen teweeg in de hoeken van de drie driehoeken, die daar omheen gelegen zijn. Deze drie driehoeken verkeeren juist onder dezelfde omstandigheden respectievelijk als de driehoeken I, II, III—III, IV, V en V, VI, I van fig. 11. Maakt men nu uit den vorigen staat de sommen $\Sigma p\delta$ en $\Sigma q\delta$ voor deze drie groepen van drie driehoeken op, dan vindt men telkens de waarde *nul*, zoodat ook eene verplaatsing van de punten op den omtrek van den aansluitingsdriehoek de som van de vierkanten van de veranderingen van de hoeken steeds doet toenemen.

Uit het bovenstaande blijkt dus, dat onze methode voor het regelmatige net van fig. 10 de som van de vierkanten van de veranderingen der hoeken werkelijk tot een minimum maakt; voor een minder regelmatig net zal dit in het algemeen niet plaats hebben, maar het is toch duidelijk dat voor een net, dat van fig. 10 niet al te veel afwijkt, die som toch nabij het minimum zal komen en dat dus in dit opzicht onze methode eene deugdelijke mag genoemd worden.

§ 15. Er blijft thans nog over de hulpmiddelen aan te geven, om langs eenvoudigen weg de veranderingen te bepalen, die de verschillende elementen van het net ondergaan, tengevolge van de aansluiting.

De betrekkelijke vergrooting is volgens form. (29):

$$V=-C_1(x_2'+x_1')+C_2(y_2'+y_1')=(-C_1x_2'+C_2y_2')+(-C_1x_1'+C_2y_1').$$

Stellen wij nu door ϱ_1 den voerstraal van het punt A_1 fig. 8 en door θ_1 den hoek, dien zij met de y-as maakt, voor en door ϱ_2 en θ_2 dezelfde grootheden voor het punt A_2, dan gaat bovenstaande uitdrukking over in:

$$V = C\,\varrho_2\cos(\theta_2-2\gamma) + C\,\varrho_1\cos(\theta_1-2\gamma).$$

Dat wil zeggen: de vergrooting wordt gemeten door de *som* van de projectiën van de voerstralen van de twee uiteinden op de lijn Mf van fig. 8, die met de y-as den hoek 2γ maakt.

Brengt men dus langs die lijn (zie fig. 13) eene schaalverdeeling aan, waarvan de eenheid is:

$$\frac{1}{m\,C\,100000} = \frac{a\,b}{m\,s\,100000},$$

dan kan men, door daarop uit de twee uiteinden der lijn loodlijnen neer te laten, die twee projectiën onmiddellijk aflezen in 100000ste deelen van de lengte. Haar som geeft de gevraagde vergrooting.

De correctie voor de logarithme is gelijk aan de relatieve vergrooting, vermenigvuldigd met den modulus $M = 0{,}4342945$. Brengt men dus langs diezelfde lijn eene tweede schaal aan met de eenheid:

$$\frac{1}{m\,M\,C\,100000} = \frac{a\,b}{m\,s\,43429},$$

dan kan men daarop bij de voetpunten van dezelfde loodlijnen aflezen. De som van de twee aflezingen geeft de correctie in eenheden van de 5de decimaal.

De verdraaiing, die de lijn ondergaat, wordt volgens form. (30) gegeven door:

$$D = C_1(y_2' + y_1') + C_2(x_2' + x_1') = (C_1 y_2' + C_2 x_2') + (C_1 y_1' + C_2 x_1').$$

Voert men hierin de voerstralen ϱ_1 en ϱ_2 en de hoeken θ_1 en θ_2 in, dan vindt men:

$$D = C\,\varrho_2 \sin(\theta_2 - 2\gamma) + C\,\varrho_1 \sin(\theta_1 - 2\gamma) =$$
$$= C\,\varrho_2 \cos(\theta_2 - 2\gamma - 90^0) + C\,\varrho_1 \cos(\theta_1 - 2\gamma - 90^0).$$

Dat wil zeggen: de verdraaiing wordt gemeten door de som van de projectiën der voerstralen op de lijn Mg fig. 8, die met de y-as den hoek $2\gamma + 90^0$ maakt.

Brengt men daarop eene schaalverdeeling aan (zie fig. 13) met de eenheid:

$$\frac{1}{m\ C\ 206264} = \frac{a\ b}{m\ s\ 206264}$$

en leest men bij de voetpunten der loodlijnen, uit de twee uiteinden der lijn daarop neergelaten, af, dan is de *som* der aflezingen de verdraaiing in secunden.

De verandering van een hoek $A_2\ A_1\ A_3$ fig. (8) wordt volgens form. (33) gegeven door:

$$\delta = C_1(y_3' - y_2') + C_2(x_3' - x_2') = (C_1 y_3' + C_2 x_3') - (C_1 y_2' + C_2 x_2'),$$

waaruit volgt, dat die correctie gevonden wordt uit het *verschil* der aflezingen op bovengenoemde schaal bij de voetpunten der loodlijnen, uit de uiteinden van de overstaande zijde neergelaten.

In § 5 form. (12) hebben wij gevonden voor de correctie van de *log. sin.* van een hoek de formule:

$$\Delta\ log\ sin\ A_1 = \Delta\ log\ I - \Delta\ log\ a_2 - \Delta\ log\ a_3.$$

Daar nu de inhoud I van den driehoek gevonden wordt uit:

$$2\ I = y_2'\ x_3' - y_3'\ x_2' + y_3'\ x_1' - y_1'\ x_3' + y_2'\ x_3' - y_2'\ x_1'$$

zoo is:

$$\Delta\ 2\ I = \Delta_{x_1}(y_3' - y_2') + \Delta_{x_2}(y_1' - y_3') + \Delta_{x_3}(y_2' - y_1') - \\ - \Delta_{y_1}(x_3' - x_2') - \Delta_{y_2}(x_1' - x_3') - \Delta_{y_3}(x_2' - x_1').$$

Door hierin voor Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}, Δ_{y_1}, Δ_{y_2} en Δ_{y_3} de waarden te substituëeren volgens form. (20), vinden wij na herleiding:

$$\Delta\ 2\ I = C_1\{y_1'^2 y_3' - y_1'^2 y_2' + y_2'^2 y_1' - y_2'^2 y_3' + y_3'^2 y_2' - y_3'^2 y_1' - \\ - x_1'^2 y_3' + x_1'^2 y_2' - x_2'^2 y_1' + x_2'^2 y_3' - x_3'^2 y_2' + x_3'^2 y_1' + \\ + 2\ x_1'\ y_1'\ x_3' - 2\ x_1'\ y_1'\ x_2' + 2\ x_2'\ y_2'\ x_1' - 2\ x_2' y_2' x_3' + \\ + 2 x_3' y_3' x_2' - 2 x_3' y_3' x_1'\}$$

$$+ C_2\{x_1'^2 x_3' - x_1'^2 x_2' + x_2'^2 x_1' - x_2'^2 x_3' + x_3'^2 x_2' - x_3'^2 x_1' - \\ - y_1'^2 x_3' + y_1'^2 x_2' - y_2'^2 x_1' + y_2'^2 x_3' - y_3'^2 x_2' + y_3'^2 x_1' + \\ + 2\ x_1'\ y_1'\ y_3' - 2\ x_1'\ y_1'\ y_2' + 2\ x_2'\ y_2'\ y_1' - 2\ x_2'\ y_2'\ y_3' + \\ + 2\ x_3'\ y_3'\ y_2' - 2\ x_3'\ y_3'\ y_1'\}.$$

Stellen wij de coördinaten van het gemeenschappelijk snijpunt van de loodlijnen, uit de drie hoekpunten van den driehoek op de overstaande zijden neergelaten, door X en Y voor, dan is:

$$X.2I = -y_1'^2y_3' + y_1'^2y_2' - y_2'^2y_1' + y_2'^2y_3' - y_3'^2y_2' + y_3'^2y_1' - \\ - x_1'y_1'x_3' + x_1'y_1'x_2' - x_2'y_2'x_1' + x_2'y_2'x_3' - x_3'y_3'x_2' + \\ + x_3'y_3'x_1'$$

$$Y.2I = +x_1'^2x_3' - x_1'^2x_2' + x_2'^2x_1' - x_2'^2x_3' + x_3'^2x_2' - x_3'^2x_1' + \\ + x_1'y_1'y_3' - x_1'y_1'y_2' + x_2'y_2'y_1' - x_2'y_2'y_3' + x_3'y_3'y_2' - \\ - x_3'y_3'y_1'.$$

Verder is:

$$(x_1'+x_2'+x_3')\,2I = x_1'^2y_3' - x_1'^2y_2' + x_2'^2y_1' - x_2'^2y_3' + x_3'^2y_2' - \\ - x_3'^2y_1' - x_1'y_1'x_3' + x_1'y_1'x_2' - x_2'y_2'x_1' + \\ + x_2'y_2'x_3' - x_3'y_3'x_2' + x_3'y_3'x_1'$$

$$(y_1'+y_2'+y_3')\,2I = -y_1'^2x_3' + y_1'^2x_2' - y_2'^2x_1' + y_2'^2x_3' - \\ - y_3'^2x_2' + y_3'^2x_1' + x_1'y_1'y_3' - x_1'y_1'y_2' + \\ + x_2'y_2'y_1' - x_2'y_2'y_3' + x_3'y_3'y_2' - x_3'y_3'y_1'.$$

Met behulp van deze uitdrukkingen gaat bovenstaande formule voor $\Delta\, 2I$, als wij tevens door $2I$ deelen, over in:

$$\frac{\Delta I}{I} = -C_1(X + x_1' + x_2' + x_3') + C_2(Y + y_1' + y_2' + y_3')$$

waaruit blijkt, dat de relatieve vergrooting van den inhoud van den driehoek gemeten wordt door de projectie op de lijn Mf fig. 8 van den voerstraal van het punt, dat gelegen is op de lijn, die het zwaartepunt van den driehoek met het snijpunt der loodlijnen vereenigt en wel op een $^1/_4$ van den afstand van beide punten, gerekend van het zwaartepunt af *). Die vergrooting kan men in 100000ste deelen gemakkelijk bepalen, door bij elkaar te tellen de aflezingen op de schaal voor de vergrooting bij de voetpunten van de lood-

*) Dit punt ligt midden tusschen het snijpunt der drie loodlijnen en het middenpunt van den omgeschreven cirkel.

lijnen uit de drie hoekpunten en uit het snijpunt van de drie hoogten daarop neergelaten. Doet men de aflezing op de schaal voor de correctiën der logarithmen, dan vindt men de correctie voor de logarithme van den inhoud.

Daar nu

$$\Delta \log I = M\frac{\Delta I}{I}$$

$$\Delta \log a_2 = M\frac{\Delta a_2}{a_2} = M\{-C_1(x_3' + x_1') + C_2(y_3' + y_1')\}$$

$$\Delta \log a_3 = M\frac{\Delta a_3}{a_3} = M\{-C_1(x_1' + x_2') + C_2(y_1' + y_2')\}$$

is, zoo gaat bovenstaande formule voor $\Delta\ lg\ sin\ A_1$ over in:

$$\Delta\ lg\ sin\ A_1 = M\{-C_1(X - x_1') + C_2(Y - y_1')\} =$$
$$= M(-C_1 X + C_2 Y) - M(-C_1 x_1' + C_2 y_1')$$

waaruit volgt, dat de correctie van den logarithme sinus van een hoek gemeten wordt door de projectie op de lijn Mf fig. 8 van het stuk van de loodlijn, uit het hoekpunt op de overstaande zijde neergelaten, begrepen tusschen dat hoekpunt en het gemeenschappelijk snijpunt der drie loodlijnen. Men kan die correctie, in eenheden van de vijfde decimaal, dus onmiddellijk vinden, door het verschil te nemen van de aflezingen, op de schaal voor de correctiën der logarithmen, bij de voetpunten der loodlijnen neergelaten uit het hoekpunt, en uit het snijpunt der drie loodlijnen.

§ 16. Als voorbeeld hebben wij in fig. 13 hetzelfde net als in fig. 1 en fig. 12 voorgesteld op de schaal $\frac{1}{m} = \frac{1}{50000}$. Door het punt M, midden tusschen A en B gelegen, zijn de twee lijnen Mf en Mg getrokken onder de hoeken:

$$2\gamma = 2 \times 68^0 11' = 136^0 22'$$

en

$$2\gamma + 90^0 = 136^0 22' + 90^0 = 226^0 22'$$

met de y-as en daarop de drie schalen aangebracht respectievelijk met de eenheden:

$$\frac{ab}{ms\,100000} = 0{,}007758 = 7{,}758\,mM$$

$$\frac{ab}{ms\,43429} = 0{,}017864 = 17{,}864\,mM$$

$$\frac{ab}{ms\,206264} = 0{,}003762 = 3{,}762\,mM.$$

Uit de drie hoekpunten van den driehoek RSV zijn daarop loodlijnen neergelaten en bij de voetpunten de volgende aflezingen gedaan, respectievelijk op de schalen voor de vergrooting, voor de correctiën der logarithmen en voor de correctiën der hoeken:

R	+ 6,80	+ 2,93	− 16″,8
S	+ 4,45	+ 1,93	− 9″,3
V	+ 9,03	+ 3,93	− 11″,2.

Eindelijk is uit het snijpunt van de drie hoogten van den driehoek eene loodlijn neergelaten op de schaal voor de correctiën der logarithmen en bij het voetpunt daarvan afgelezen:

3,06.

Uit deze aflezingen volgen nu de onderstaande waarden voor de verschillende correctiën, waarbij tevens gevoegd zijn de waarden, zooals die door directe berekening volgen:

			Volgens fig. 13.	Door berekening.
Vergrootingen in 100000ste deelen der lengten *)	SV	4,45 + 9,03 =	13,48	+13,5
	VR	9,03 + 6,80 =	15,83	+15,8
	RS	6,80 + 4,45 =	11,25	+11,2

*) De schaal voor de vergrooting kan men des verkiezende weg laten; meestal heeft men de relatieve vergrooting niet noodig, maar alleen de correctie van de logarithme. Men kan trouwens die vergrooting ook vinden

		Volgens fig. 18.	Door berekening.
Corr. van de *log* der zijden in eenheden van de 5de decimaal	SV	$1{,}93 + 3{,}93 =$	$5{,}86 + 5{,}86$
	VR	$3{,}93 + 2{,}93 =$	$6{,}86 + 6{,}86$
	RS	$2{,}93 + 1{,}93 =$	$4{,}86 + 4{,}86$

Verdraaiingen der zijden	SV	$-9'',3 - 11'',2 = -20'',5$	$-20'',6$
	VR	$-11'',2 - 16'',8 = -28'',0$	$-28'',2$
	RS	$-16'',8 - 9'',3 = -26'',1$	$-26'',2$

Correctiën der hoeken	R	$-9'',3 + 11'',2 = +1'',9$	$+2'',0$
	S	$-11'',2 + 16'',8 = +5'',6$	$+5'',6$
	V	$-16'',8 + 9'',3 = -7'',5$	$-7'',6$

Corr. van de *log sin* in eenheden van de 5de decimaal	R	$3{,}06 - 2{,}93 = +0{,}13$	$+0{,}14$
	S	$3{,}06 - 1{,}93 = +1{,}13$	$+1{,}13$
	V	$3{,}06 - 3{,}93 = -0{,}87$	$-0{,}85$

Voor de correctie van de logarithme van den inhoud des driehoeks volgt uit bovenstaande aflezingen ook nog:

$$3{,}06 + 2{,}93 + 1{,}93 + 3{,}93 = 11{,}85$$

eenheden van de 5de decimaal.

§ 16. Bij de vorige ontwikkelingen hebben wij den oorsprong van het coördinatenstelsel op het midden van de lijn AB aangenomen. Neemt men den oorsprong in een willekeurig punt, dan blijven C en γ en dus ook C_1 en C_2 onveranderd. B_1 en B_2 worden echter niet nul en A_1' en A_2' gaan over in A_1 en A_2.

De hier geldende waarden voor A_1, A_2, B_1 en B_2 kunnen gemakkelijk uit de vroeger ontwikkelde waarden voor C, γ, A_1 en A_2 en de plaats van den oorsprong worden afgeleid.

---

door de correctie van de logarithme te vermenigvuldigen met $\frac{1}{M}$. In de meeste logarithmentafels treft men eene tafel aan van de veelvouden van $\frac{1}{M}$, waarin men dus onmiddellijk die producten kan vinden.

Voor C en γ hebben wij gevonden:

$$C = \frac{s}{ab}$$

$$\gamma = 90^0 + \varphi - \frac{\sigma + B - A}{2} = 90 + \varphi - \tfrac{1}{2}\psi,$$

als wij $\sigma + B - A$ kortheidshalve door ψ voorstellen, volgt hieruit:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -C \sin 2\gamma = -\frac{s}{ab}\sin(\psi - 2\varphi) \\ C_2 &= +C \cos 2\gamma = -\frac{s}{ab}\cos(\psi - 2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad . . \quad (38)$$

Stelt men den voerstraal, gaande van den oorsprong naar het punt, midden tusschen AB gelegen, door R en den hoek, dien hij met de y-as maakt, door Ω voor, dan is:

$$x_0 = \frac{x_a + x_b}{2} = R \sin \Omega$$

$$y_0 = \frac{y_a + y_b}{2} = R \cos \Omega .$$

Vergelijkt men deze uitdrukkingen met de formules (23) dan vindt men:

$$R = \frac{B}{2C} \quad \text{en} \quad \Omega = 2\gamma - \beta$$

waaruit volgt:

$$B = 2CR = \frac{2s}{ab} R$$

$$\beta = 2\gamma - \Omega = 180^0 + 2\varphi - \psi - \Omega$$

en dus:

$$\left.\begin{aligned} B_1 = +B \sin\beta &= +2CR \sin(2\gamma - \Omega) = \\ &= 2CR \sin(\Omega + \psi - 2\varphi) \\ B_2 = -B \cos\beta &= -2CR \cos(2\gamma - \Omega) = \\ &= 2CR \cos(\Omega + \psi - 2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad . . . . \quad (39)$$

Substitueert men de waarden van B en β in (24) en neemt men de waarden van A_1' en A_2' uit (29) over, dan vindt men:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{s\,c^2}{4\,a\,b}\sin(\sigma+B-A)+\frac{s}{a\,b}R^2\sin(2\,\Omega-2\,\gamma)= \\ &= \tfrac{1}{4}\,C\,c^2\sin\psi\;-\;C\,R^2\sin(2\,\Omega-2\,\varphi+\psi) \\ A_2 &= \frac{s\,c^2}{4\,a\,b}\cos(\sigma+B-A)+\frac{s}{a\,b}R^2\cos(2\,\Omega-2\,\gamma)= \\ &= \tfrac{1}{4}\,C\,c^2\cos\psi\;-\;C\,R^2\cos(2\,\Omega-2\,\varphi+\psi) \end{aligned}\right\}\ldots(40)$$

§ 17. Is het driehoeksnet niet aangesloten aan een van de zijden van den aansluitingsdriehoek in het net van hoogere orde, maar moeten ook aan de coördinaten van de punten A en B de correctiën $\Delta_{xa} = X_a - x_a$, $\Delta_{ya} = Y_a - y_a$, $\Delta_{xb} = X_b - x_b$ en $\Delta_{yb} = Y_b - y_b$ worden aangebracht, dan blijven alle beschouwingen doorgaan; alleen het punt, waarvoor B_1 en $B_2 = 0$ worden, komt op eene andere plaats en A_1', A_2', C en γ verkrijgen andere waarden.

Neemt men den oorsprong van het coördinatenstelsel in een willekeurig punt, dan zijn de waarden van A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 gelijk aan de sommen van de drie waarden, die men verkrijgt, in de drie onderstellingen, dat alleen het punt A, alleen het punt B en alleen het punt C eene verplaatsing behoeft te ondergaan. Berekent men die waarden volgens (38), (39) en (40), dan geven hunne sommen de waarden van A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2, en met behulp van (21)—(24) vindt men dan de waarden van C, γ, x_0, y_0, A_1' en A_2'.

Zoowel voor de nauwkeurigheid, als voor het gemak van deze berekening, is het wenschelijk den oorsprong van het coördinatenstelsel niet al te ver buiten den driehoek te nemen.

De eenvoudigste formules verkrijgt men, door den oorsprong te nemen in het middelpunt van den omgeschreven cirkel.

De straal r van dien cirkel vindt men uit *):

*) In deze paragraaf komen de letters B en C in tweeërlei beteekenis voor; daaruit kan echter geen verwarring ontstaan, aangezien zij op de eene plaats een hoek op de andere een coëfficiënt voorstellen.

$$r = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} \ldots\ldots (41)$$

en de coördinaten van het middelpunt uit:

$$\left.\begin{array}{ll} X = \frac{x_a + x_b}{2} + r \cos C \cos \varphi_c & Y = \frac{y_a + y_b}{2} - r \cos C \sin \varphi_c \\ X = \frac{x_b + x_c}{2} + r \cos A \cos \varphi_a & Y = \frac{y_b + y_c}{2} - r \cos A \sin \varphi_a \\ \text{of:} & \\ X = \frac{x_c + x_a}{2} + r \cos B \cos \varphi_c & Y = \frac{y_c + y_a}{2} - r \cos B \sin \varphi_b \end{array}\right\} \ldots (42)$$

waarin φ_c, φ_a en φ_b de hoeken voorstellen, die de lijnen $AB = c$, $BC = a$ en $CA = b$ met de y-as maken.

In de formules (39) en (40), die gelden voor de verplaatsing van het punt C, wordt dan:

$$R = r \cos C = \tfrac{1}{2} c \operatorname{cotg} C \quad \text{en} \quad \Omega = \varphi_c + 270^0$$

waardoor zij overgaan in:

$$B_1 = 2Cr \cos C \sin(\varphi_c + 270^0 + \psi - 2\varphi_c) = -2Cr \cos C \cos(\varphi_c - \psi)$$

$$B_2 = 2Cr \cos C \cos(\varphi_c + 270^0 + \psi - 2\varphi_c) = -2Cr \cos C \sin(\varphi_c - \psi)$$

$$A_1 = \tfrac{1}{4} Cc^2 \sin \psi - \tfrac{1}{4} Cc^2 \operatorname{ctg}^2 C \sin(2\varphi_c + 540^0 - 2\varphi_c + \psi) = Cr^2 \sin \psi$$

$$A_2 = \tfrac{1}{4} Cc^2 \cos \psi - \tfrac{1}{4} Cc^2 \operatorname{ctg}^2 C \cos(2\varphi_c + 540^0 - 2\varphi_c + \psi) = Cr^2 \cos \psi$$

Nemen wij nu aan dat alle drie de punten eene verplaatsing moeten ondergaan en stellen wij:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta x_a = s_a \sin \sigma_a & \Delta y_a = s_a \cos \sigma_a \\ \Delta x_b = s_b \sin \sigma_b & \Delta y_b = s_b \cos \sigma_b \\ \Delta x_c = s_c \sin \sigma_c & \Delta y_c = s_c \cos \sigma_c \end{array}\right\} \ldots\ldots (43)$$

en verder:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_a - B + C = \psi_a & \dfrac{s_a}{bc} = C_a \\ \sigma_b - C + A = \psi_b & \dfrac{s_b}{ca} = C_b \\ \sigma_c - A + B = \psi_c & \dfrac{s_c}{ab} = C_c \end{array}\right\}, \quad \ldots . \quad (44)$$

dan vinden wij het volgende stel formules:

$$\left.\begin{array}{l} C\sin 2\gamma = -C_a \sin(2\varphi_a - \psi_a) - C_b \sin(2\varphi_b - \psi_b) - \\ \qquad\qquad - C_c \sin(2\varphi_c - \psi_c) \\ C\cos 2\gamma = -C_a \cos(2\varphi_a - \psi_a) - C_b \cos(2\varphi_b - \psi_b) - \\ \qquad\qquad - C_c \cos(2\varphi_c - \psi_c) \end{array}\right\} \ldots (45)$$

$$\left.\begin{array}{l} B\sin\beta = -2r\{C_a \cos A \cos(\psi_a - \varphi_a) + C_b \cos B \cos(\psi_b - \varphi_b) + \\ \qquad\qquad + C_c \cos C \cos(\psi_c - \varphi_c)\} \\ B\cos\beta = -2r\{C_a \cos A \sin(\psi_a - \varphi_a) + C_b \cos B \sin(\psi_b - \varphi_b) + \\ \qquad\qquad + C_c \cos C \sin(\psi_c - \varphi_c)\} \end{array}\right\} \ldots (46)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = r^2\{C_a \sin\psi_a + C_b \sin\psi_b + C_c \sin\psi_c\} \\ A_2 = r^2\{C_a \cos\psi_a + C_b \cos\psi_b + C_c \cos\psi_c\} \end{array}\right\} \ldots . \quad (47)$$

Heeft men uit deze formules C, γ, B, β, A_1 en A_2 berekend, dan volgen x_0, y_0, A_1' en A_2' uit:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = X + \dfrac{B}{2C}\sin(2\gamma - \beta) \\ y_0 = Y + \dfrac{B}{2C}\cos(2\gamma - \beta) \end{array}\right\} \ldots . \quad (48)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1' = A_1 - \dfrac{B^2}{4C}\sin(2\gamma - 2\beta) \\ A_2' = A_2 - \dfrac{B^2}{4C}\cos(2\gamma - 2\beta) \end{array}\right\} \ldots . \quad (49)$$

In de formules (48) zijn X en Y de coördinaten van het middelpunt van den omgeschreven cirkel (zie form. 42); x_0 en y_0 zijn de coördinaten ten opzichte van een willekeurig punt als oorsprong. De waarden A_1 en A_2 formule (47) gelden voor hetzelfde middelpunt; A'_1 en A'_2 voor het punt x_0 y_0, waarvoor B_1 en B_2 nul worden.

§ 18. Vergelijken wij thans de beide methoden met elkander.

Bij de methode van de parallelle verschuiving is de bepaling van de correctiën voor de coördinaten zeer eenvoudig. Bij de methode van de conforme overbrenging is de bepaling van die correctiën iets, doch niet veel omslachtiger. Meestal heeft men echter niet alleen de correctiën voor de coördinaten noodig, maar wil men ook de correctiën kennen, die de zijden en hare logarithmen, die de hoeken en de logarithmen hunner sinussen en die de richtingen der zijden ondergaan. Al deze correctiën worden bij de nieuwe methode langs eenvoudiger weg gevonden dan bij de oude. Bij de nieuwe methode worden zij in de kaart zelve gevonden, bij de andere in eene hulpfiguur. Daarbij is het noodig in die hulpfiguur lijnen te trekken, evenwijdig aan de zijden van het net, en dit kan vooral bij korte zijden aanleiding geven tot fouten.

Behalve dit is het aantal aflezingen, dat men in de figuur moet doen, bij de methode der parallelle verschuiving grooter dan bij de nieuwe methode. Bij de eerste moet men voor iedere zijde 3 aflezingen doen, dus bij het net fig. 1. $3 \times 49 = 147$; bij de nieuwe methode voor ieder hoekpunt 3 en voor iederen driehoek 1; dus voor hetzelfde net $3 \times 23 + 27 = 96$; hun aantal verhoudt zich dus hier als 3 tot 2. Wil men de relatieve vergrootingen der zijden niet hebben, maar alleen de correctiën van hare logarithmen, dan heeft men bij de eerste methode 49, bij de tweede 23 aflezingen minder, dus in het geheel bij de eerste $2 \times 49 = 98$, bij de tweede $2 \times 23 + 27 = 73$.

Vergelijken wij de veranderingen, die het net door de aansluiting volgens de twee methoden ondergaat, dan blijkt het, dat bij de methode van de parallelle verschuiving de hoe-

ken, waar het vooral op aankomt, omdat het deze elementen zijn, die door directe waarneming gevonden worden, veel grootere correctiën ondergaan dan bij de nieuwe methode. Bij het regelmatige net van fig. 10 zijn die correctiën juist n-maal zoo groot. De som van de vierkanten van die correctiën is bij de eerste methode $n^2 S$, bij de tweede slechts S. Tevens is bij de laatste methode deze som zoo klein als slechts mogelijk is.

Ten einde ook bij een minder regelmatig net de veranderingen met elkander te kunnen vergelijken, hebben wij het net, dat hiervoor herhaalde malen als voorbeeld gediend heeft en dat in fig. 1, 12 en 13 is voorgesteld, ook volgens de methode der kleinste vierkanten berekend.

De drie hier achter gevoegde tabellen bevatten de uitkomsten dier berekeningen. De eerste bevat de voorloopige coördinaten der hoekpunten en de correctiën daarvan. De tweede de lengten der zijden en hare hoeken met de y-as, benevens de relatieve vergrootingen en de verdraaiingen der zijden. De derde bevat de hoeken met de correctiën daarvan.

De lengten der zijden, de hoeken met de y-as en de hoeken van de driehoeken zijn gegeven tot in meters resp. minuten, hetgeen voor het overzicht voldoende is; op de nauwkeurige waarden daarvan komt het hier natuurlijk niet aan. Het blijkt daaruit, dat de lengten der zijden varieeren tusschen 694 en 2353 meter en de hoeken tusschen $17^0\,16'$ en $121^0\,15'$. De grootste van de driehoeken heeft een inhoud van 206, de kleinste van 33 hectaren.

Uit tabel III blijkt nu, dat bij de methode der parallelle verschuiving de correctiën voor de hoeken opklimmen tot $45'',2$ bij de methode der kleinste vierkanten slechts tot $10'',5$ en bij de nieuwe methode tot $12'',5$.

De som van de vierkanten van de correctiën der hoeken is volgens de methode der kleinste vierkanten 1813. Volgens de methode der parallelle verschuiving 57881 of 32-maal zoo veel. Volgens de nieuwe methode is zij 2788 *) of slechts ruim *anderhalf* maal het kleinst mogelijk bedrag.

---

*) Bij de aansluiting ondergaan de hoeken van den aansluitingsdriehoek

Ten einde den aard der vervormingen, die het net ondergaat, te leeren kennen, dient men vooral te letten op de teekens van de vergrootingen en de verdraaiingen der zijden, en dan blijkt uit tabel II dat, bij de methode der kleinste vierkanten, de vergrootingen positief zijn voor het grootste gedeelte van het net. Alleen voor de lijnen in de buurt van het punt B zijn de vergrootingen negatief. Juist hetzelfde heeft plaats bij de nieuwe methode; daarin zijn de vergrootingen negatief voor alle zijden, waarvan het midden gelegen is tusschen de lijn gM en het punt B fig. 13. De verdraaiingen der zijden zijn bij de methode der kleinste vierkanten alleen positief bij de zijden in de buurt van het punt A. Bij onze nieuwe methode heeft volkomen hetzelfde plaats; alle zijden waarvan het midden gelegen is tusschen de lijn Mf en het punt A ondergaan eene positieve draaiing. De methode der parallelle verschuiving stemt, wat de vervormingen betreft, in het geheel niet overeen met de methode der kleinste vierkanten; de vergrootingen en verdraaiingen alleen afhankelijk zijnde van de richtingen der zijden, zoo verdeelen de positieve en negatieve teekens dier grootheden zich over het geheele net.

Ook wat de teekens van de correctiën der hoeken betreft, stemt de nieuwe methode beter dan de methode der parallelle verschuiving met de methode der kleinste vierkanten overeen. Neemt men al de hoeken om één punt, dan hebben wij vroeger reeds gezien, dat bij de parallelle verschuiving die hoeken in vier groepen verdeeld worden; in twee daarvan zijn de teekens positief in de twee andere negatief. Bij de nieuwe methode hebben wij gezien, dat die hoeken slechts in twee groepen verdeeld worden. De uitkomsten in tabel III bevestigen dit, en gaat men daarin na de correctiën volgens de methode der kleinste vierkanten, dan vindt men dat deze, wat het teeken betreft, ook slechts in twee groepen verdeeld worden.

Een enkel voorbeeld moge dit nader toelichten. Kiezen

---

de veranderingen: — 12″,69, + 41″,84 en — 29″,15. De som van de vierkanten hiervan is 2762. De som van de vierkanten van de correctiën der hoeken volgens de nieuwe methode komt dus ook bij dit zeer onregelmatige net op weinig na hiermede overeen (zie: § 14).

wij het punt S, waaromheen de meeste hoeken voorkomen, dan vinden wij voor de correctiën dier hoeken:

	Nieuwe M.	Kl. V.	P. V.
XV.	— 1″,3	— 1″,4	— 11″,6
XVI.	— 4″,0	— 6″,7	+ 27″,2
XVII.	— 6″,5	— 5″,9	+ 6″,7
XVIII.	— 8″,3	— 5″,0	— 40″,6
XIX.	+ 4″,7	+ 3″,5	+ 1″,1
XX.	+ 5″,0	+ 6″,1	+ 31″,2
XIX.	+ 4″,8	+ 5″,4	+ 10″,2
XXII.	+ 5″,6	+ 4″,1	— 24″,3

Vergelijken wij eindelijk nog in tabel I de correctiën der coördinaten en letten vooral op de verschillen tusschen de correctiën zoo als die bij de methode der kleinste vierkanten en bij de twee andere methoden gevonden worden. Daaruit blijkt, dat die verschillen bij de methode der parallelle verschuiving opklimmen tot 48 centimeter of ongeveer de helft van het te vereffenen verschil; bij de nieuwe methode bedraagt dat verschil hoogstens 10 centimeter of ongeveer een tiende van het te vereffenen verschil.

Vatten wij al het voorgaande samen, dan vinden wij, dat bij de nieuwe methode de berekening van de correctiën der coördinaten iets samengestelder is dan bij de methode der parallelle verschuiving, dat daarentegen alle andere correctiën langs eenvoudiger weg gevonden worden; dat de veranderingen, die de hoeken ondergaan, veel geringer zijn en de vervorming, die het net ondergaat, in het algemeen in karakter overeenstemt met de vervorming, die het net moet ondergaan, om de som van de vierkanten van de correctiën der hoeken zoo klein mogelijk te maken.

Delft, Maart 1881.

TABEL I.

	Voorloopige coördinaten.		Conforme overbrenging.		Verschillen C. O.—Kl. V.		Kleinste Vierkanten.		Verschillen P. V.—Kl. V.		Parallelle verschuiving.	
	x	y	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx	Δy
	Meters.	Meters.	cM.	cM.	cM.	cM.	cM.	cM.	cM.	cM.	cM.	cM.
A	1228,64	1342,46	0	0	"	"	0	0	"	"	0	0
B	3259,48	7157,44	0	0	"	"	0	0	"	"	0	0
C	9357,26	4220,82	115	97	"	"	115	97	"	"	115	97
D	1252,48	2328,80	12	5	5	7	7	— 2	—12	— 2	— 5	— 4
E	2880,42	2714,64	24	— 4	3	4	21	— 8	— 2	24	19	16
F	2296,67	3089,83	22	1	8	3	14	— 2	— 7	8	7	6
G	1567,25	3389,01	21	5	10	4	11	1	—17	— 6	— 6	— 5
H	2105,64	4316,40	24	3	9	0	15	3	—18	— 5	— 3	— 2
I	2879,81	4968,47	22	5	6	— 1	16	6	—10	— 1	6	5
K	2215,62	5605,45	21	0	8	— 5	13	5	—21	—12	— 8	— 7
L	3815,20	5755,86	16	12	5	— 2	11	14	6	0	17	14
M	4847,83	7004,48	— 4	27	3	4	— 7	23	33	— 1	26	22
O	4879,48	5738,69	18	26	6	— 1	12	27	22	2	34	29
P	5382,65	6377,02	9	37	8	0	1	37	38	— 4	39	33
Q	6330,09	5892,86	24	53	9	— 2	15	55	42	— 7	57	48
R	6351,03	4547,08	49	39	7	— 2	42	41	23	13	65	54
S	4706,64	4199,01	35	14	4	— 1	31	15	9	19	40	34
T	4243,26	2567,65	39	— 6	2	— 3	37	— 3	5	38	42	35
U	5560,80	2555,03	60	— 1	5	— 6	55	5	8	48	63	53
V	6302,09	3180,07	66	15	7	— 7	59	22	11	37	70	59
W	7436,21	4339,68	70	55	10	— 1	60	56	23	14	83	70
IJ	7936,26	5120,04	62	80	8	— 1	54	81	33	— 8	87	73
Z	8280,87	4271,49	89	72	8	0	81	72	16	10	97	82

TABEL II.

Zijden.	Lengten der zijden.	Vergrootingen in 100000ste deelen.			Hoeken met de IJ as.	Verdraaiingen der zijden.		
		C.O.	Kl. V.	P.V.		C. O.	Kl V.	P. V.
AD	987	+ 5,4	− 2,3	− 4,6	1°23′	+ 25″,4	+ 15″,0	— 10″,1
AE	2147	+ 7,6	+ 5,2	+ 11,5	50°17′	+ 17″,8	+ 18″,5	— 0″,3
DE	1673	+ 5,8	+ 7,3	+ 16,8	76°40′	+ 14″,0	+ 10″,2	— 17″,1
DF	1292	+ 4,1	+ 4,6	+ 12,7	53°55′	+ 14″,9	+ 6″,4	— 1″,3
FE	694	+ 6,3	+ 12,3	+ 6,4	122°44′	+ 7″,2	+ 3″,3	— 42″,9
DG	1106	+ 2,2	+ 3,9	− 0,9	16°32′	+ 16″,6	+ 5″,9	— 1″,2
GF	788	+ 2,7	+ 4,9	+ 10,3	112°18′	+ 9″,8	+ 4″,4	— 40″,2
HF	1241	+ 2,1	+ 3,9	− 5,5	171° 9′	+ 4″,7	+ 1″,9	— 18″,6
GH	1072	+ 0,0	+ 3,1	+ 4,0	30° 8′	+ 6″,1	+ 3″6	+ 2″,9
FI	1967	+ 2,0	+ 4,1	− 0,7	17°15′	— 1″,0	— 0″,4	— 0″,9
HI	1012	— 0,6	+ 3,1	+ 11,4	49°54′	— 4″,8	— 2″,3	— 0″,0
HK	1294	— 3,0	+ 1,2	— 3,9	4°53′	— 4″,6	— 3″,2	— 8″,1
KI	920	— 2,8	+ 1,9	+ 2,1	133°48′	— 9″,9	— 7″,4	— 41″,7
IL	1223	— 0,2	+ 0,9	+ 11,4	49°55′	— 16″,6	— 16″,4	— 0″,0
KB	1870	— 6,2	— 5,8	+ 5,4	33°55′	— 19″,4	— 8″,9	+ 3″,2
IB	2222	— 3,8	— 3,8	— 2,8	9°50′	— 19″,6	— 14″,0	— 4″,9
BL	1508	— 3,6	— 5,9	— 4,7	158°22′	— 26″,1	— 20″,9	— 28″,6
BN	1596	— 4,1	— 5,7	+ 15,2	95°30′	— 34″,7	— 29″,1	— 32″,1
LN	1620	— 0,5	— 2,5	+ 7,7	39°36′	— 31″,7	— 25″,3	+ 2″,8
NO	1266	+ 1,4	— 2,7	— 4,9	178°34′	— 35″,7	— 30″,7	— 12″,7
NP	824	+ 1,1	— 6,8	+ 0,1	139°33′	— 40″,0	— 37″,8	— 39″,8
OP	813	+ 3,5	+ 1,6	+ 7,1	38°15′	— 35″,5	— 37″,9	+ 3″,0
PQ	1064	+ 5,8	+ 4,8	+ 8,6	117° 4′	— 41″,6	— 42″,4	— 42″,2
OQ	1459	+ 6,1	+ 10,4	+ 16,7	83°56′	— 37″,4	— 38″,0	— 23″,4
QR	1346	+ 11,0	+ 4,4	— 4,9	179° 7′	— 38″,6	— 40″,0	— 12″,3

Plaat I.

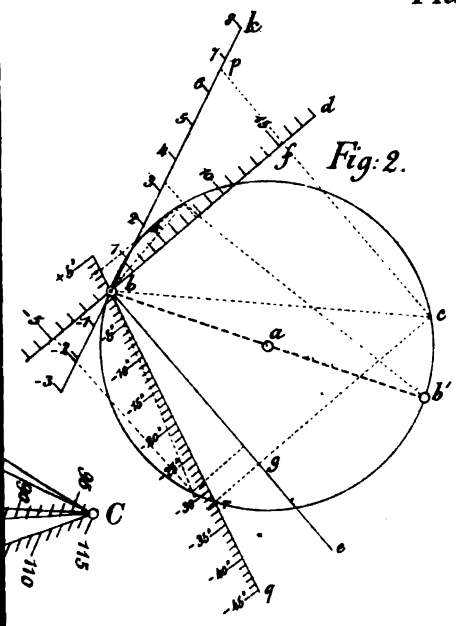


Fig: 2.

x

TABEL II. (VERVOLG).

ZIJDEN.	LENGTEN DER ZIJDEN.	VERGROOTINGEN IN 1,00000ste DEELEN.			Hoeken met de IJ as.	VERDRAAIINGEN DER ZIJDEN.		
		C.O.	Kl. V.	P.V.		C. O.	Kl. V.	P. V.
OR	1894	+ 8,7	+ 7,7	+ 4,1	129° 0′	— 32″,5	— 32″,2	— 42″,7
SO	1549	+ 6,4	+ 6,5	— 3,6	6°24′	— 24″,9	— 27″,3	— 7″,1
LO	1064	+ 1,9	+ 0,6	+ 16,0	90°55′	— 27″,2	— 25″,8	— 28″,8
LS	1794	+ 4,5	+ 5,1	— 3,0	150°12′	— 20″,9	— 20″,6	— 34″,3
IS	1982	+ 4,3	+ 5,0	+ 10,1	112°50′	— 14″,4	— 14″,7	— 41″,0
IE	2254	+ 3,8	+ 5,9	— 4,8	179°59′	— 1″,9	— 4″,2	— 28″,1
ES	2353	+ 8,5	+ 9,3	+ 11,7	50°54′	— 6″,1	— 9″,7	— 0″,4
ET	1371	+ 10,7	+ 11,4	+ 15,1	96° 9′	+ 1″,7	— 9″,1	— 32″,5
TS	1696	+ 11,2	+ 9,3	— 1,1	5°51′	— 10″,8	— 13″,1	— 1″,5
TU	1318	+ 15,8	+ 13,7	+ 16,1	90°33′	— 8″,1	— 13″,9	— 28″,5
SU	1853	+ 13,5	+ 10,5	— 3,6	152°33′	— 15″,8	— 19″,2	— 32″,8
UV	896	+ 18,1	+ 15,8	+ 10,0	45°44′	— 17″,9	— 20″,5	+ 1″,5
SV	1810	+ 13,5	+ 10,7	+ 5,8	124°16′	— 20″,6	— 24″,6	— 42″,9
SR	1681	+ 11,2	+ 9,4	+ 16,9	78° 3′	— 26″,2	— 28″,7	— 18″,7
VR	1375	+ 15,8	+ 12,5	— 3,6	6°13′	— 28″,2	— 29″,3	— 7″,2
VW	1693	+ 18,1	+ 14,5	+ 10,3	46°47′	— 31″,6	— 29″,8	+ 1″,1
RW	1105	+ 15,8	+ 13,9	+ 13,9	100°49′	— 37″,2	— 34″,8	— 35″,5
RIJ	1686	+ 15,2	+ 15,3	+ 16,3	70° 8′	— 42″,0	— 41″,4	— 12″,4
QIJ	1782	+ 12,7	+ 13,1	+ 9,1	115°42′	— 46″,8	— 47″,7	— 41″,8
WIJ	927	+ 17,6	+ 19,3	+ 5,0	32°39′	— 45″,4	— 41″,3	+ 3″,2
WZ	847	+ 19,8	+ 22,6	+ 15,4	94°37′	— 43″,6	— 43″,1	— 31″,4
IJZ	916	+ 19,2	+ 20,0	— 4,6	157°54′	— 48″,4	— 47″,6	— 29″,0
IJC	1682	+ 21,2	+ 25,5	+ 6,6	122°20′	— 52″,4	— 55″,8	— 42″,9
ZC	1078	+ 23,4	+ 30,5	+ 15,7	92°42′	— 50″,6	— 50″,0	— 30″,1

TABEL III.

Driehoeken.	Hoekpunten.	Hoeken.	Correctiën der hoeken.		
			C. O.	Kl. V.	P. V.
I	A	48° 54′	— 7″,7	+ 3″,5	+ 10″,4
	D	104° 43′	+ 11″,4	+ 4″,8	+ 6″,9
	E	26° 23′	— 3″,7	— 8″,3	— 17″,4
II	D	22° 45′	— 0″,9	+ 3″,9	— 15″,7
	E	46° 4′	— 6″,8	— 7″,0	— 25″,3
	F	111° 11′	+ 7″,7	+ 3″,1	+ 41″,0
III	D	37° 23′	— 1″,7	+ 0″,5	— 0″,7
	F	58° 23′	— 5″,1	— 2″,0	— 39″,0
	G	84° 14′	+ 6″,8	+ 1″,5	+ 39″,7
IV	F	58° 51′	— 5″,5	— 2″,5	+ 22″,3
	G	82° 10′	+ 3″,8	+ 0″,8	— 43″,8
	H	38° 59′	+ 1″,7	+ 1″,7	+ 21″,5
V	F	26° 6′	— 5″,4	— 2″,2	+ 17″,7
	H	121° 15′	+ 9″,1	+ 4″,1	— 18″,6
	I	32° 39′	— 3″,8	— 1″,9	+ 0″,9
VI	E	57° 15′	— 9″,1	— 7″,4	+ 31″,2
	F	105° 29′	+ 8″,3	+ 3″,6	— 42″,0
	I	17° 16′	+ 0″,9	+ 3″,8	+ 10″,8
VII	H	45° 1′	— 0″,2	+ 0″,9	+ 8″,1
	I	83° 54′	— 5″,2	— 5″,1	— 41″,7
	K	51° 5′	+ 5″,4	+ 4″,2	+ 33″,6

TABEL III. (VERVOLG.)

DRIEHOEKEN.	HOEKPUNTEN.	HOEKEN.	CORRECTIËN DER HOEKEN.		
			C. O.	Kl. V.	P. V.
VIII	B	24° 5′	+ 0″,2	+ 5″,1	+ 8″,1
	I	56° 2′	— 9″,7	— 6″,6	+ 36″,9
	K	99° 53′	+ 9″,5	+ 1″,5	— 45″,0
IX	B	31° 28′	+ 6″,5	+ 6″,9	+ 23″,8
	I	40° 5′	+ 3″,0	— 2″,3	+ 4″,8
	L	108° 27′	— 9″,5	— 4″,5	— 28″,6
X	B	62° 52′	+ 8″,5	+ 8″,2	+ 3″,4
	L	61° 14′	— 5″,5	— 4″,4	+ 31″,5
	N	55° 54′	— 3″,0	— 3″,9	— 34″,9
XI	L	51° 19′	+ 4″,5	— 0″,5	— 31″,6
	N	41° 2′	+ 4″,0	+ 5″,4	+ 15″,6
	O	87° 39′	— 8″,5	— 4″,9	+ 16″,1
XII	N	39° 1′	+ 4″,3	+ 7″,1	+ 27″,1
	O	39° 41′	+ 0″,2	— 7″,2	+ 15″,7
	P	101° 18′	— 4″,5	+ 0″,1	— 42″,9
XIII	O	45° 41′	— 1″,9	— 0″,1	— 26″,4
	P	101° 11′	+ 6″,1	+ 4″,5	+ 45″,2
	Q	33° 8′	— 4″,3	— 4″,4	— 18″,8
XIV	O	45° 4′	+ 4″,9	+ 5″,8	— 19″,3
	Q	84° 49′	+ 1″,3	+ 2″,0	— 11″,1
	R	50° 7′	— 6″,1	— 7″,8	+ 30″,4

TABEL III. (VERVOLG.)

DRIEHOEKEN.	HOEKPUNTEN.	HOEKEN.	CORRECTIÊN DER HOEKEN.		
			C. O.	Kl. V.	P. V.
XV	O	57° 24′	+ 7″,6	+ 4″,9	+ 35″,6
	R	50° 57′	— 6″,3	— 3″,5	— 24″,0
	S	71° 39′	— 1″,3	— 1″,4	— 11″,6
XVI	L	59° 17′	+ 6″,3	+ 5″,2	— 5″,5
	O	84° 31′	— 2″,3	+ 1″,5	— 21″,7
	S	36° 12′	— 4″,0	— 6″,7	+ 27″,2
XVII	I	62° 55′	+ 2″,3	+ 1″,7	— 41″,0
	L	79° 43′	+ 4″,2	+ 4″,2	+ 34″,3
	S	37° 22′	— 6″,9	— 5″,9	+ 6″,7
XVIII	E	50° 55′	— 4″,2	— 5″,5	+ 11″,2
	T	67° 9′	+ 12″,5	+ 10″,5	+ 29″,4
	S	61° 56′	— 8″,3	— 5″,0	— 40″,6
XIX	E	45° 15′	+ 7″,8	+ 0″,5	— 32″,1
	S	35° 3′	+ 4″,7	+ 3″,5	+ 1″,1
	T	99° 42′	— 12″,5	— 4″,0	+ 31″,0
XX	S	43° 18′	+ 5″,0	+ 6″,1	+ 31″,2
	T	74° 42′	+ 2″,7	— 0″,8	— 27″,0
	U	62° 0′	— 7″,8	— 5″,2	— 4″,3
XXI	S	28° 17′	+ 4″,8	+ 5″,4	+ 10″,2
	U	73° 11′	— 2″,0	— 1″,3	+ 34″,2
	V	78° 32′	— 2″,7	— 4″,1	— 44″,4

TABEL III. (VERVOLG.)

DRIEHOEKEN.	HOEKPUNTEN.	HOEKEN.	CORRECTIËN DER HOEKEN.		
			C. O.	Kl. V.	P. V.
XXII	R	71° 50′	+ 2″,0	+ 0″,6	— 11″,5
	S	46° 13′	+ 5″,6	+ 4″,1	— 24″,3
	V	61° 57′	— 7″,6	— 4″,7	+ 35″,8
XXIII	R	85° 24′	+ 9″,0	+ 5″,5	+ 28″,3
	V	40° 34′	— 3″,4	— 0″,6	+ 8″,3
	W	54° 2′	— 5″,6	— 4″,9	— 36″,6
XXIV	R	30° 41′	+ 4″,8	+ 6″,6	— 23″,0
	W	111° 50′	— 8″,2	— 6″,5	+ 38″,6
	IJ	37° 29′	+ 3″,4	— 0″,1	— 15″,6
XXV	Q	63° 25′	+ 8″,2	+ 7″,7	+ 29″,5
	R	71° 1′	— 3″,3	— 1″,4	— 0″,1
	IJ	45° 34′	— 4″,9	— 6″,3	— 29″,4
XXVI	W	61° 58′	+ 1″,8	— 1″,8	— 34″,6
	IJ	54° 45′	+ 3″,0	+ 6″,3	+ 32″,1
	Z	63° 17′	— 4″,8	— 4″,5	+ 2″,5
XXVII	C	29° 38′	— 1″,8	— 5″,8	— 12″,8
	IJ	35° 34′	+ 4″,0	+ 8″,2	+ 13″,9
	Z	114° 48′	— 2″,2	— 2″,4	— 1″,1

Sommen van de vierkanten van de correctiën der hoeken:

Conforme overbrenging	2788
Kleinste vierkanten	1813
Parallelle verschuiving	57881

KOPIJ VAN EENE BEREKENING

VAN DEN

UITSLAG DER GEDANE WEGINGEN EN ONDERLINGE VERGELIJKINGEN

VAN DEN PLATINA STANDAARD VAN HET NED. POND, EN VAN TWEE KOPEREN STANDAARDS, MET HET PROTOTYPE VAN HET KILOGRAM TE PARIJS, IN HET JAAR 1838 TE PARIJS GEDAAN DOOR EENE DAARTOE BENOEMDE COMMISSIE, BESTAANDE UIT WIJLEN DE HEEREN LIPKENS, UYLENBROEK EN LOBATTO.

MEDEGEDEELD DOOR

F. J. STAMKART.

PLATINA STANDAARD.

1838. 22 *October*. Barom. 765,5 mm., Therm. 16° C.

Vol. protot. bij 0° = 48615 cub. mm.
» plat. stand. — = 46938 »
Verschil in vol. bij 0° = 1677 cub. mm.
» bij 16° = 1677.7 »

Cub. uitzetting platina van 0° tot 16° C. = 0.00041.

Volgens de tafel van V. D. TOORN is het gewigt van 1 cub. centim. lucht bij 765,5 mm. en 16° C. = 1,231 mgr.

Dus zal het gewigt van het vol. meerder verplaatste lucht bedragen 1,6777 × 1,231 = 2,065 mgr.

In de lucht zou alzoo plat. stand. = Prot. + 2,065 mgr. moeten zijn; doch volgens het gemiddelde uit 10 wegingen is. . . . . » » = » + 2,11 »
Derhalve zal in het luchtledige. . . . . » » = » + 0,045 » zijn.

---

23 *October*. Barom. 762 mm., Therm. 16° C.

Gewigt cub. centim. lucht bij 762 mm. en 16° = 1,225.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 1,6777 × 1,225 = 2,055 mgr.

In de lucht zou derhalve plat. stand. = Prot. + 2,055 mgr.; doch volgens het gemiddelde uit 20 wegingen is. » » = » + 2,23 »
Dus zal in het luchtledige » » = » + 0,175 » zijn.

---

24 *October*. Barom. 758,5 mm., Therm. 15° C.

Gewigt cub. centim. lucht bij 758,5 en 15° = 1,225 mm.	Gewigt vol. meerder verpl. lucht = 16777 × 1,225 = 2,055 mgr.

In de lucht zou derhalve plat. stand. = Prot. + 2,055 mgr.; doch volgens het gemiddelde uit 20 wegingen. . » » = » + 2,21 »
Dus in het luchtledige. . » » = » + 0,155 »

---

6 *November*. Barom. 756 mm., Therm. 13° C.

Gewigt cub. centim. lucht bij 756 mm. en 13° C. = 1,229 mm.	Gewigt vol. meerder verpl. lucht = 1,6777 × 1,229 = 2,062 mgr.

In de lucht zou dus plat. stand. = Prot. + 2,062 mgr.;
maar volgens het gemid-
delde uit 20 wegingen is » » = » + 2,23 »
Dus in het luchtledige » » = » + 0,168 »

Volgens het gemiddelde uit de 70 wegingen, komt er:

Plat. Stand. = Prot. + 0,136 mgr. [NB. moet zijn 0,149].

KOPEREN KILOGRAM B.

8 *November*. Barom. 754 mm., Therm. 14° C.

Vol. kilogr. B } bij 0° = 122379 cub. mm.
» prot. } bij 0° = 48615 » »
Verschil in vol. bij 0° = 73764 » »
Verschil in vol. bij 14° = 73843 » »

Uitzetting van 0 tot 14° C.

Vol. kil. B = 122379 × 0,000789 = 96,53
» prot. = 48615 × 0,00036 = 17,49
Verschil in uitzetting = 79 cub. mm.

Gew. cub. cent. lucht bij 754 mm. en 14° = 1,222 mgr.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 73,843 × 1,222 = 90,24 mgr.

In de lucht zou dus kil. B = Prot. — 90,24 mgr.; doch
volgens het gemiddel-
de uit 20 wegingen . . » » = » — 90,03 »
Dus in het luchtledige » » = » + 0,21 »

KOPEREN KILOGRAM C.

9 *November*. Barom. 748 mm., Therm. 14° C.

Vol. kilogr. C } bij 0° = 121677 cub. mm
» prot. } bij 0° = 48615 » »
Verschil in vol. bij 0° = 73062 » »
Verschil in vol. bij 14° = 73140 » »

Uitzetting van 0 tot 14° C.

Vol. kil. C = 121677 × 0,000789 = 95,98
» prot. = 48615 × 0,00036 = 17,58
Verschil in uitzetting = 78 cub. mm.

Gewigt 1 cub. centim. lucht bij 748 mm. en 14° = 1,212 mgr.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 73,14 × 1,212 = 88,65 mgr.

In de lucht zou dus kil. C = Prot. — 88,65 mgr.
Gem. uit 20 wegingen » » = » — 89,87 »
Dus in het luchtledige » » = » — 1,22 »

Ergo Kil. B = Kil. C + 1,43 mgr.

VERGELIJKING VAN HET KOPEREN KILOGR. B MET DEN PLATINA STANDAARD [TE LEIDEN].

1839. 20 *Januarij*. Barom. 761,5 mm., Therm. 5° C.

Vol. kil. B bij 0° = 122379 cub. mm.
» plat. stand. » = 46938 » »
Verschil in vol. » = 75441 » »
Verschil in vol. bij 5° = 75469 » »

Uitzetting van 0 tot 5° C.

Vol. kilogr. B = 122379 × 0,000282 = 34,47
» plat. stand. = 46938 × 0,000128 = 6,03
Verschil in uitzetting = 28 cub. mm.

Gew. 1 cub. centim. lucht bij 761,5 mm. en 5° = 1,277 mgr.

Gewigt vol. meerder verpl. lucht = 75,469 × 1,277 = 96,37 mgr.

In de lucht zou dus kil. B = Plat. Stand. — 96,37 mgr.
Gem. uit 11 wegingen » » = » » — 95,63 »
Dus in het luchtledige » » = » » + 0,74 »

[VERVOLG VERGELIJKING KILOGR. B MET DEN PLATINA STAND.].

1839. 23 *Januarij*. Barom. 775,5 mm., Therm. 5° C.

Vol. kil. B. — Vol. plat. stand. bij 5° = 75469 cub. mm.

Gew. cub. centim. lucht bij 775,5 mm. en 5° = 1,299 mgr.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 75,469 × 1,299 = 98,03 mgr.

In de lucht zou dus kil. B = Plat. Stand. — 98,03 mgr.
Gem. uit 10 wegingen » » = » » — 97,5 »
Dus in het luchtledige » » = » » + 0,53 »

---

26 *Januarij*. Barom. 767,4 mm., Therm. 5° C.

Vol. kil. B. — Vol. plat. stand. bij 5° = 75469 cub. mm.

Gew. 1 cub. centim. lucht bij 767,4 mm. en 5° = 1,286 mgr.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 75,469 × 1,286 = 97,05 mgr.

In de lucht zou dus kil. B = Plat. Stand. — 97,05 mgr.
Gem. uit 10 wegingen » » = » » — 96,73 »
Dus in het luchtledige » » = » » + 0,32 »

Gemiddeld uit 31 wegingen:

Kil. B = Plat. Stand. + 0,53 mgr. [± 0,12].

VERGELIJKING VAN HET KOPEREN KILOGR. C MET DEN PLATINA STANDAARD.

20 *Januarij*. Barom. 762 mm., Therm. 5° C.

Vol. kilogr. C bij 0° = 121677 cub. mm.
» plat. stand. » = 46938 » »
Verschil vol. bij 0° = 74739 » »
» vol. bij. 5° = 74767 » »

} verschil in uitzetting van 0 tot 5° C. evenals bij B = 28 cub. mm.

Gew. 1 cub. centim. lucht bij 762 mm. en 5^0 = 1,277 mgr.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 74,767 × 1,277 = 95,48 mgr.

In de lucht zou dus kil. C = Plat. Stand. — 95,48 mgr.
Gem. uit 10 wegingen » » = » » — 95,6 »
Dus in het luchtledige » » = » » — 0,12 »

---

23 *Januarij*. Barom. 775,5 mm., Therm. 5^0 C.

Vol. kil. C. — Vol. plat. stand. bij 5^0 = 74767 cub. mm.

Gewigt 1 cub. centim. lucht bij 775,5 mm. en 5^0 = 1,299 mgr.

Gew. vol. meerder verpl. lucht = 74,767 × 1,299 = 97,12 mgr.

In de lucht zou dus kil. C = Plat. Stand. — 97,12 mgr.
Gem. uit 20 wegingen » » = » » — 98,6 »
Dus in het luchtledige » » = » » — 1,48 »

Gemiddeld uit 30 wegingen:

Kil. C = Plat. Stand. — 0,80 mgr. = Prot. — 0,66
[moet zijn — 1,02 en — 0,88]
en Kil. B = Plat. Stand. + 0,53 mgr. = Prot. + 0,67
dus Kil. B = Kil. C + 1,33 mgr. [moet zijn 1,55]
te Parijs » » = » » + 1,43.

ONDERLINGE VERGELIJKING VAN DE KILOGR. B EN C.

26 *Januarij*. Barom. 767,4 mm., Therm. 5^0 C.

Vol. kilogr. B bij 0^0 = 122379 cub. mm.
» C » = 121677 »
Verschil in vol. bij 0^0 = 702 cub. mm.

De uitzetting voor 5^0 is te gering om hier van invloed te zijn.

Gew. cub. centim. lucht bij 767,4 mm. en 5^0 = 1,286 mgr.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 0,702 × 1,286 = 0,9 mgr.

In de lucht zou dus	kil.	B	=	Kil.	C	— 0,9	mgr.
Gem. uit 9 wegingen	»	»	=	»	»	+ 0,37	»
Dus in het luchtledige	»	»	=	»	»	+ 1,27	»

---

11 *Februarij.* Barom. 776,7 mm., Therm. 6^0 C.

Vol. kil. B. — Vol. kil. C bij 0^0 = 702 cub. mm.

Gew. cub. centim. lucht bij 776,7 mm. en 6^0 C. = 1,296 mgr.	Gew. vol. meerder verpl. lucht = 0,702 × 1,296 = 0,91 mgr.

In de lucht zou dus	kilogr.	B	=	Kil.	C	— 0,91	mgr.
Gem. uit 10 wegingen	»	»	=	»	»	+ 0,25	»
Dus in het luchtledige	»	»	=	»	»	1,16	»

Gemiddeld uit 19 wegingen:

Kilogr. B = Kil. C + 1,21 mgr.

OVERZIGT.

te Parijs.		*te Leiden.*	
	mgr.		mgr.
Kil. B = Prot.	+0,21	Kil. B = Prot.	+0,67
» C = . »	−1,22	» C = »	−0,66 [−0,88]
dus » B = Kil. C	+1,43	dus » B = kil. C	+1,33 [+1,54]

Volgens onderlinge vergelijking: Kil. B = Kil. C + 1,21.

Dit opstel is door den Heer LOBATTO in de maand October 1856 ter inzage aangeboden aan de Commissie uit de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, belast met het ma-

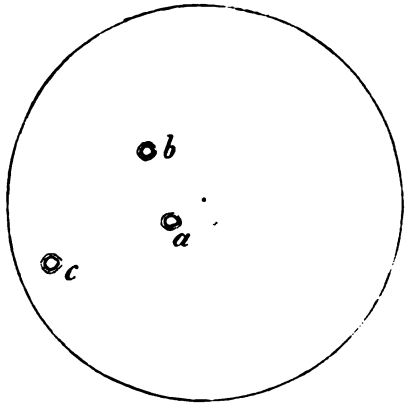
ken van kopijen van de Nederlandsche Standaards, bestaande uit de Heeren STAMKART, VAN REES, LOBATTO en OUDEMANS (de Heer VAN REES afwezig) en gekopiëerd door mij den 30sten October 1856 te Amsterdam.

F. J. STAMKART.

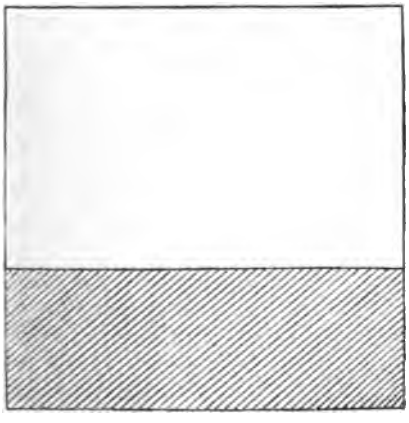
BESCHRIJVING VAN HET KILOGRAM UIT LEIDEN.

Kilogram B, cilindervormig; middell. 53,8 mm. } zeer nabij.
hoogte 53,8 » }

Op het bovenvlak vertoonen zich 3 ongeveer ronde vlekken van eene lichtrood-koperachtige kleur, van 1,2 à 1,3 mm. middellijn; *a* staat 5 à 6 mm. uit het midden; *c* 4½ mm. van den rand af en de onderlinge afstanden der vlekken zijn:



$ab = 10{,}1$, $ac = 16{,}7$,
$bc = 20{,}6$ mm.



Op den omtrek vertoont zich eene donkere moet, ter hoogte zoo ver als het stuk in het fluweel van den bodem van het kistje staat, dat is ongeveer 17½ mm. diep.

Op deze moet kan men door een mikroskoop zeer kleine groenachtige vlekjes onderscheiden, meest in de diepten, die van de punt des bijtels zijn over-

gebleven; het schijnt dat deze plekjes kleinekoperverzuursels zijn, een gevolg van vochtigheid.

Op den bodem zijn voorts nog twee lichtgroene plekjes te zien op een onderlingen afstand van 12 mm.

Het kilogram C van het Ministerie vertoont dezelfde moet van onderen, maar geene vlekken boven of onder, en ik meen ook niet de kleine groene plekjes bemerkt te hebben.

Amsterdam 28 Julij 1857.

GEWIGTEN EN MATEN

TEN DIENSTE VAN HET

IJKWEZEN IN NEDERLANDSCH OOST-INDIË

ONDERZOCHT IN DE JAREN 1866—1868 DOOR DE COMMISSIE VOOR STANDAARDMETER EN -KILOGRAM.

DOOR

F. J. STAMKART.

De gewigten bestonden uit twee *stellen*, ieder van 2 stuks à 2 kilogram, en verder nog uit 26 stuks, van het kilogram tot het milligram, in het geheel 56 stuks.

De maten uit een ijzeren meter, een koperen comparateur voor lengtematen, en *vier* stuks koperen liters.

In Nederlandsch Oost-Indië bevindt zich een verguld koperen kilogram N°. 4, dat reeds in de jaren 1856—1857 door de genoemde Commissie was geverifiëerd, en door den Heer Dr. J. A. C. OUDEMANS, toen lid der Commissie, te zamen met den daarbij behoorenden glazen meter N°. 3, bij zijn vertrek naar Batavia is medegenomen *).

De gewigten, ten dienste van het ijkwezen in Oost-Indië, zijn beschouwd geworden als standaards van den 2den rang,

---

*) In de vergadering der Akademie van 25 Junij 1859 is het berigt gelezen, dat de Heer Dr. J. A. C. OUDEMANS, dadelijk na aankomst in de Oost, het kilogram N°. 4 en de el N°. 3 aan het Oost-Indische gouvernement heeft ter hand gesteld.

het kilogram N⁰. 4 echter als een standaard van den *eersten* rang. Die gewigten zijn daarom zoo gejusteerd, dat zij in de lucht zeer nabij met N⁰. 4 gelijk zouden wegen, schoon er in het luchtledige, ten gevolge van verschil in uitgebreidheid, een klein verschil van ongeveer 5 milligram moet bestaan.

De gewigten zijn niet regtstreeks vergeleken met het platina kilogram, maar met een glazen, met kwik grootendeels gevuld, kilogram, dat in het jaar 1856 met het platina vergeleken was, en toen door Gl_2 is aangewezen. Dit stuk is in het luchtledige iets zwaarder dan het platina kilogram, namelijk 6,97 milligram, of:

$$Gl_2 = \text{Platina Kil.} + 6{,}97 \text{ mgr.}$$

Eerst zijn de uitgebreidheden der stukken van 1 kilogram op de gewone wijze gevonden, door weging in de lucht en in gedistilleerd water. Het bleek dat beide stukken weinig in soortelijk gewigt verschillen, en in uitgebreidheid slechts 1117 mm³. Voor de te verrichten herleidingen tot het luchtledige is toen de gemiddelde uitgebreidheid der stukken van 1 kilogram aangenomen, te weten — de stukken door I en I' aanwijzende —

$$\text{Vol. I} = 125017 \text{ mm}^3 \quad \text{en} \quad \text{Vol. I'} = 123900 \text{ mm}^3.$$

Gemiddeld:

$$124458 \text{ mm}^3 \text{ bij } 0^0 \text{ C.}$$

De inhoud van het glazen kilogram bedraagt 99501 mm³ bij 0⁰, dus alsdan 24957 mm³ minder dan de gemiddelde inhoud der Oost-Indische gewigten voor het ijkwezen.

Den 8sten Maart 1867, bij een barometerstand = 750,0 mm. (na herleiding op 0⁰); eene dampdrukking = 5,9 mm. en een thermometerstand = 9⁰,8 C., is door wegingen gevonden:

$I = Gl_2 - 32{,}22$ mgr. $I' = Gl_2 - 32{,}35$ mgr.

verschil reductie:

I en $Gl_2 = 30{,}73$ » $30{,}73$ »

in het luchtledige:

$I = Gl_2 - 1{,}49$ mgr. $I' = Gl_2 - 1{,}62$ mgr.

maar:

$Gl_2 = Plat. + 6{,}97$ » $Gl_2 = Plat. + 6{,}97$ »

dus in het luchtledige:

$I = Plat. + 5{,}48$ mgr. $I' = Plat. + 5{,}35$ mgr.

Nu is, ook in het luchtledige, N°. 4 = Plat. + 1,26 mgr., dus komt:

$I = N^0.\ 4 + 4{,}22$ mgr. $I' = N^0.\ 4 + 4{,}09$ mgr.

Indien de volumina van I en I' en N°. 4 gelijk waren, dan zoude ditzelfde verschil ook in de lucht plaats hebben. De reductiën zijn echter verschillend, en wel voor I en I' grooter dan voor N°. 4.

Zij de gemiddelde barometerstand min $^3/_8$ dampdruk, aangenomen = 760 mm. en de temperatuur = 25° C., dan wordt bij den overgang van het luchtledige tot in de lucht I en I' *meer* opgeheven dan N°. 4: 5,48 mgr.

Dus zal men gemiddeld in de lucht hebben:

$I = N^0.\ 4 - 1{,}2$ mgr. $I' = N^0.\ 4 - 1{,}4$ mgr.

Indien het vergulde gewigt N°. 4 in den loop eener $\frac{1}{4}$ eeuw geene verandering in zwaarte heeft ondergaan (wat onbekend is) en indien de Oost-Indische gewigten in 14 à 15 jaar ook onveranderd zijn gebleven, dan hebben nog de laatst geschreven vergelijkingen plaats.

De onderdeelen van het kilogram, alsook de dubbele kilogrammen, zijn van de kilogrammen I en I' afgeleid. Het aantal wegingen is hiertoe natuurlijk zeer groot geweest. Hierbij is aangenomen, dat alle koperen stukken *hetzelfde* soortelijk gewigt bezitten als de kilogram-stukken, iets dat gewis zeer na aan de waarheid zijn zal, en bovendien bij wegingen in de lucht van geen merkbaren invloed is. — De

veranderingen in de digtheden der lucht toch komen, streng genomen, daarbij alleen in aanmerking, in verband met het verschil van de digtheden der stukken. Ditzelfde geldt in hooger mate nog van de aluminiumgewigtjes onder het gram.

De volgende lijst bevat de uitkomst der wegingen en berekeningen. De letter H wijst een hectogram aan, D een decagram, g een gram; de cijfers 2 of 5 er bij, als H_5, H_2; D_5, D_2; g_5, g_2 duiden de stukken van 5 of 2 *hectogram*, *decagram* of *gram* aan. Waar twee stukken van *hetzelfde* gewigt aanwezig zijn, worden zij door een puntje (.) aan den voet van één daarvan onderscheiden *).

De cijfers achter elk stuk, in de tweede kolom, wijzen in milligrammen de gevonden gemiddelde fouten der stukken aan; + als zij iets te zwaar, — als zij iets te ligt zijn.

Gewigten in Oost-Indië I *en* I′ *zonder en met accent.*

		mgr.			mgr.
Dubbele kilogrammen	I_2	+ 1	Dubbele kilogrammen	I_2'	— 1
	$_{\bullet}I_2$	0		$_{\bullet}I_2'$	0
Kilogram	I	— 1	Kilogram	I′	— 1
Hectogrammen	H_5	— 0,1	Hectogrammen	H_5'	— 0,1
	H_2	+ 0,1		H_2'	0
	H	0		H′	0
	$_{\bullet}H$	0		$_{\bullet}H'$	— 0,1
Decagrammen	D_5	+ 0,20	Decagrammen	D_5'	— 0,2
	D_2	+ 0,14		D_2'	+ 0,13
	D	+ 0,15		D′	+ 0,16
	$_{\bullet}D$	+ 0,17		$_{\bullet}D'$	+ 0,22
Grammen	g_5	+ 0,09	Grammen	g_5'	+ 0,06
	g_2	+ 0,04		g_2'	+ 0,09
	$_{\bullet}g_2$	+ 0,07		$_{\bullet}g_2'$	+ 0,08
	g	— 0,07		g′	+ 0,02

*) Eene noot is teruggevonden, met potlood geschreven, luidende: „Al

Milligramgewigten van aluminium.

Doos 1.		Doos 2.	
mgr.	mgr.	mgr.	mgr.
1000	+ 0,02	1000	+ 0,01
500	+ 0,02	500	+ 0,01
200	— 0,02	200	+ 0,01
100	0	100	+ 0,01
100′	0	100′	+ 0,01
50	— 0,04	50	0
20	0	20	0
10	— 0,01	10	0
10′	0	10′	0
5	0	5	0
2	— 0,01	2	+ 0,01
2′	— 0,02	2′	+ 0,01
1	+ 0,01	1	+ 0,01

LENGTEMAAT EN COMPARATEUR.

De ijzeren meter, vergeleken met een standaard-el van den tweeden rang, is iets (ongeveer $^3/_{100}$ à $^4/_{100}$ mm.) te kort gevonden.

Hij zal dus de lengte van een meter bezitten bij de temperatuur van nabij 4° C.

De comparateur bestaat in hoofdzaak uit eene koperen pris-

„de gewigten van dit kistje zijn aan het ondervlak gemerkt met een „puntje (.). Van de stukken gewigt, die dubbel voorkomen, is daarenboven „een puntje (.) *boven op* gemerkt."

matische staaf, het boven- of liever boven-zijvlak in millimeters verdeeld, zooals de comparateuren der ijk-kantoren. Hij onderscheidt zich van deze voornamelijk daarin, dat de zoogenaamde vaste dook ook verschoven kan worden en op verschillende plaatsen aan de koperen staaf kan worden vastgeklemd; en ook daarin, dat de koperen staaf zich vrijelijk kan uitzetten en inkrimpen, zonder door het hout der doos, waarin zij zich bevindt, belemmerd te worden, en in nog eenige veranderingen.

De geheele lengte is vergeleken met een ijzeren meter, die bij 21° C. temperatuur 3 à 4 micron langer is bevonden dan de ijzeren meter, die door VAN SWINDEN is overgebracht, en dus in elk geval maar zeer weinig fout kan zijn.

Aangenomen uitzetting
van ijzer . . . . . 12,20 micron per meter voor 1° C.
van koper. . . . . 18,78 » » » » » »

---

17 Februari 1867, temp. 10°,8 C.; aanwijzing comparateur	1000,31 m.m
Uitzetting el voor 10°,8. . . .	0,13 »
Aanwijzing van 1 meter bij 10°,8 door den comparateur	1000,18 m.m.
21 Februari 1867, temp. 9°,7 C.; aanwijzing comparateur	1000,36 m.m.
Uitzetting el voor 9°,7. . . .	0,12 »
Aanwijzing van 1 meter bij 9°,7 door den comparateur	1000,24 m.m.
23 Februari 1867, temp. 9°,8 C.; aanwijzing comparateur	1000,35 m.m.
Uitzetting el voor 9°,8. . . .	0,12 »
Aanwijzing van 1 meter bij 9°,8 door den comparateur	1000,23 m.m.

Dit maal had de ijzeren el 2 dagen op den comparateur gelegen.

De beide laatste bepalingen verdienen eenig meer vertrouwen dan de eerste. Met de uitzetting van het koper = 18,78 micron komt voor de aanwijzing door den comparateur van 1 meter bij 10^0 C.

17 Februari	1000,195	m.m. (dit met ½ gewigt).
21 »	1000,213	»
23 »	1000,226	»
Gemiddeld bij 10^0	1000,233	m.m.

0,233 m.m. komt, tegen 18,78 micron *) uitzetting van koper, per meter en per graad C., overeen met eene uitzetting voor 11,9 graden.

Dus is de lengte van den comparateur tot aanwijzing van 1000 m.m., of 1 meter, *goed* bij eene temperatuur van $10 + 11^0,9$, dat zeer nabij bij 22^0 C. is.

De verdeeling in decimeters, 1, 2, 3 .... 9 is vervolgens onderzocht, en is gevonden dat elk der aanwijzende strepen gemiddeld binnen + of — 1½ *hondersten* millimeter juist geplaatst zijn.

Eindelijk is ook nog de lengte van verschillende *millimeter*-verdeelingen onderling vergeleken, met behulp van een microscoop en micrometerschroef. Het resultaat is geweest dat twee verschillende millimeters tot 9 micron of ongeveer $^1/_{100}$ m.m. verschillen kunnen; dat dezelfde nauwkeurigheid ook aan de verdeeling van den nonius toekomt, en dat de absolute plaats van een willekeurig gekozen verdeelstreep hoogstens binnen $^1/_{50}$ m.m. als goed kan aangenomen worden.

Wanneer het werktuig gebezigd wordt om lengtematen, die bijna gelijk zijn, te *vergelijken*, dan kan, uit den aard der zaak, de fout niet zoo groot zijn.

---

*) De uitzetting 18,78 komt toevallig vrij goed overeen met het gemiddelde der kubieke uitzetting 57½, die voor de litermaten gevonden is.

Koperen Litermaten.

Vier stuks: een hooge en een lage en nogmaals een hooge en een lage liter, zijn onderzocht, de beide laatsten gemerkt met een puntje *).

De gemiddelde temperatuur der waarnemingen is ongeveer 13° C. geweest; voor de hooge liters van omtent 6 à 7° tot 23°, voor de lage liters van 2 tot 23° ongeveer.

Het gemiddelde resultaat uit 8 bepalingen is geweest: als i de inhoud van den liter voorstelt in kubieke m.m. en t de temperatuur in graden van den honderddeeligen thermometer, dan is:

zonder puntje { hooge liter $i = 100^3 - 181 + 56{,}73\,(t - 13)$ m.m.^{3}
lage liter $i = 100^3 - 280 + 56{,}11\,(t - 13)$ »

met puntje { hooge liter $i = 100^3 - 167 + 56{,}54\,(t - 13)$ »
lage liter $i = 100^3 - 372 + 60{,}41\,(t - 13)$ »

Hieruit volgt voor de inhouden der liters, bij:

	Hooge liter.	Lage liter.	Hooge liter.	Lage liter.	
4°	0,999308	0,999215	0,999324	0,999084	cub. decim.
20°	1,000216	1,000133	1,000229	1,000050	» »

De inhouden der liters bij 4° zijn eigenlijk de gewigten aan gedistilleerd water van 4° dat er in vervat is. Elke maat, die voor eene juiste vulling met water geschikt is, kan door waterweging onderzocht worden.

Nog zij opgemerkt, dat bovenstaande bepalingen, streng genomen, eigenlijk gelden bij het gebruik van *dezelfde* dekglazen, die er bijgevoegd en bij de verificatiën gebruikt zijn.

Bij die verificatiën is, voor de densiteiten van het water bij verschillende temperaturen, gevolgd de tafel van Hallström.

---

*) Zooveel ik mij herinner slechts met een inktpuntje, onder aan de basis.

Ten slotte zij opgemerkt, dat de koperen balanzen, die mede door den heer OLLAND geleverd zijn, bij de verificatiën der gewigten gebruikt zijn en daarbij zeer goed voldaan hebben. Bij eene daarvan: de grootere, is eene aanwijzing betrekkelijk het gebruik medegegeven.

April 1881.

OVER DE WERKING

VAN

ZWAVELZUUR OP AZIJNZUURANHYDRIDE.

DOOR

A. P. N. FRANCHIMONT.

Bezig zijnde met de bereiding in groote hoeveelheid van het geacetyleerde lichaam uit cellulose, dat ik onlangs heb vermeld, ten einde er het splitsingsproduct van te leeren kennen, wilde ik tegelijkertijd de bijproducten bij de vorming nagaan. Ik dampte derhalve de waterige vloeistof, waarmede de oplossing van cellulose, in met zwavelzuur vermengd azijnzuuranhydride, was neergeslagen tot op een klein volumen in en stelde mij voor het zwavelzuur er uit te verwijderen door toevoeging van bariumacetaat. Tot mijne verwondering evenwel ontstond er geen neerslag van bariumsulfaat, maar na verdere indamping kreeg ik een, in kleine schubjes of plaatjes gekristalliseerd, bariumzout, dat, eenmaal afgescheiden, bijna niet meer in water oploste, zoodat het door afwasschen met kokend water zuiver werd verkregen. Na droging op 230° C. bepaalde ik het bariumgehalte, door verhitting met zwavelzuur. 0,4598 gr. gaven 0,389 gr. bariumsulfaat; het bariumgehalte bedraagt dus 49,74 pCt.

Vervolgens bevonden hebbende, dat de verbinding zwavel bevatte, werd het gehalte hiervan bepaald, door smelting met natriumnitraat en carbonaat en bepaling van het hierdoor gevormde zwavelzuur; 0,5067 gr. leverden 0,4268 gr. bariumsulfaat; het zwavelgehalte bedraagt dus 11,56 pCt.

Dit, zoowel als het bariumgehalte, komen juist overeen met dat van bariumsulfoacetaat (Ba 49,81 pCt., S. 11,63 pCt.), waarvoor ook de moeielijke oplosbaarheid pleitte.

Een andermaal werd het bovenvermelde zure vocht met loodcarbonaat verzadigd en zoo een zeer moeielijk oplosbaar loodzout verkregen, waaruit door zwavelwaterstof het zuur werd vrijgemaakt. De oplossing er van kleurde zich bij het indampen aan de lucht zeer bruin en scheidde, nadat zij ten slotte boven zwavelzuur in het luchtledige was geplaatst, eenige kristalletjes af, die zeer vervloeibaar waren. Deze eigenschappen stemmen overeen met hetgeen MELSENS *), de ontdekker van het sulfo-azijnzuur, er van vermeldt. Ten slotte werd uit het aldus verkregen vrije zuur, door middel van zilvercarbonaat, het zilverzout bereid, dat fraaie, harde kristallen vormt. Van dit zout, dat bij 100° gedroogd werd, waarbij het iets meer dan één molecuul water verloor, werd eene koolstof- en waterstofbepaling gemaakt, door verbranding met gesmolten loodchromaat; 3,0954 gr. gaven 0,1652 gr. water en 0,7729 koolzuurgas, waaruit volgt: voor de koolstof 6,80 pCt., voor de waterstof 0,59 pCt., terwijl het zilversulfoacetaat verlangt C 6,77 H 0,56. Bij de verhitting bleef er van 0,333 gr. 0,204 gr. terug; aannemende dat dit zilver is, wordt het zilvergehalte 61,26 pCt., terwijl de berekening vordert 61,01 pCt. MELSENS houdt het residu voor metallisch zilver; mij komt het echter voor, dat er zeer goed een spoor zilversulfaat bij kan zijn.

De vermelde waarneming leerde mij, dat het zwavelzuur in de bovengenoemde reactie eene andere rol speelt dan die van wateronttrekkend of waterbindend middel en ik werd er daardoor toe gebracht zijne werking op het azijnzuuranhydride eenigermate na te gaan, ten einde er achter te komen, welke rol het bij de acetyleering der cellulose vervult.

Voor zoover ik heb kunnen nagaan is er omtrent de werking dezer beide lichamen op elkander niets bekend.

---

*) *Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles.* T. XVI. (1844).

Wel vermeldt GERHARDT, omtrent de werking van rookend zwavelzuur, dat er koolzuurgas en een niet nader onderzocht sulfozuur ontstaat, en OPPENHEIM vermoedt dat er, bij de werking van acetylchloride op zwavelzuur, behalve chloorwaterstof, acetylzwavelzuur geboren wordt. Het laatste geval is in zooverre analoog aan het hier beschrevene dat, terwijl OPPENHEIM van een gemengd zuuranhydride uitging, ik een eenvoudig anhydride bezigde.

Houdt men het vermoeden van OPPENHEIM voor juist, dan mag men verwachten, dat er hier, behalve azijnzuur, eveneens acetylzwavelzuur zal ontstaan en dit, dat hoogstwaarschijnlijk zeer gemakkelijk reageert op hydroxylbevattende lichamen, zou door alcoholen onder vorming van azijnzure aethers en zwavelzuur ontleed kunnen worden. Had er nu geene verdere werking plaats, dan zou men in het water, waarmede de producten der reactie behandeld worden, het zwavelzuur als zoodanig moeten terugvinden. Dit nu was bij de acetyleering der cellulose niet het geval, maar in de plaats er van vond ik het sulfo-azijnzuur.

Vermengt men azijnzuuranhydride en zwavelzuur in zoodanige gewichtshoeveelheden, dat er op één molecuul van het eene lichaam ook één molecuul van het andere voorhanden is, dan wordt het mengsel warm en krijgt men eene zeer dikke strooperige vloeistof, veel dikker dan zwavelzuur; de reuk van het azijnzuuranhydride, dat gemakkelijk door de prikkelende werking op de slijmvliezen van neus en oogen, zelfs in kleine hoeveelheden, te herkennen is, is geheel verdwenen en heeft plaats gemaakt voor dien van azijnzuur.

Heeft men de beide zelfstandigheden zeer langzaam en onder goede afkoeling met elkander gemengd en brengt men de dikke vloeistof daarna onmiddellijk in water, dan vindt men hierin al het aangewende zwavelzuur in vrijen toestand terug.

Heeft men het mengsel daarentegen eenigen tijd, b.v. een paar dagen, bij de gewone temperatuur laten staan, of heeft het zich bij de menging sterk verwarmd, dan is de vloeistof,

hoewel nog zeer dik, dunner dan de voorgaande en bij de verdunning met water vindt men hierin niet al het aangewende zwavelzuur in vrijen toestand.

Verhit men het even tot op 120°—130° C., dan bedraagt de hoeveelheid vrij zwavelzuur in de met water behandelde vloeistof nog veel minder. Ik vond b.v. in een dergelijk geval slechts $^1/_{10}$ van het gebruikte zwavelzuur, terwijl ik in het voorafgaande $^2/_3$ of meer had gevonden.

Distilleert men een mengsel van de beide lichamen in de genoemde verhouding, dan komt er azijnzuur over, doch de verkregen hoeveelheid is, zelfs al wordt de vloeistof tot op 160° C. gebracht, niet veel meer dan $^1/_5$ in gewicht van het gebezigde anhydride. Het residu levert, als het in water wordt opgelost, altijd nog vrij zwavelzuur.

Plaatst men het genoemde mengsel in het luchtledige, boven kalk en phosphorzuuranhydride, dan is er, zelfs na twee maanden, geen spoor van kristallisatie in waar te nemen.

Kiest men de gewichtsverhoudingen zóó, dat er op twee moleculen azijnzuuranhydride één molecuul zwavelzuur voorhanden is, dan is de warmteontwikkeling bij de menging veel sterker, zelfs zóó, dat de vloeistof begint te koken: zij kleurt zich bruin, de reuk naar het anhydride is eveneens volkomen verdwenen, en brengt men nu het product in water, dan bevat dit geen vrij zwavelzuur, maar sulfo-azijnzuur en azijnzuur. De hoeveelheid sulfo-azijnzuurbarium, die er uit verkregen werd, bewees dat al het zwavelzuur in sulfo-azijnzuur was omgezet.

Vermengt men de beide lichamen in de laatstgenoemde gewichtsverhouding langzaam en onder afkoeling, dan krijgt men eene kleurlooze dikke vloeistof, die nog sterk riekt naar het anhydride; brengt men er eenige druppels van in water, dan bevat dit eene aanzienlijke hoeveelheid vrij zwavelzuur. Verwarmt men het kleurlooze mengsel zacht, dan treedt er plotseling eene hevige werking in, de vloeistof begint te koken, kleurt zich en levert nu, wanneer zij in water gebracht wordt, geen vrij zwavelzuur, maar sulfo-azijnzuur.

Verwarmt men het mengsel van twee moleculen anhydride

en één molecuul zwavelzuur tot op 160° C. dan distilleert er azijnzuur over, in gewicht bijna de helft van het gebezigde anhydride. Het residu is niet oplosbaar in aether.

Hetzelfde heeft plaats als men het mengsel gedurende eenige dagen op 100° verhit en er een drogen luchtstroom doorzuigt. Distilleert men echter bij eene lage drukking, b.v. van 43 mm., dan komt er meer azijnzuur over; uit 10 gr. anhydride kreeg ik op deze wijze ongeveer acht gram azijnzuur. Het residu, dat donkerbruin gekleurd was, loste niet op in aether, wel in water en bevatte geen vrij zwavelzuur. (sulfo-azijnzuur is niet oplosbaar in aether)

Dat het sulfo-azijnzuur zich met azijnzuur verbindt, even-als het dit met water doet, is, hoewel niet zeker, volgens het gedrag bij verwarming, toch wel waarschijnlijk. In het luchtledige geplaatst boven kalk en phosphorzuuranhydride heeft het mengsel van sulfo-azijnzuur en azijnzuur, zelfs na twee maanden, nog den reuk van azijnzuur en vertoont nog geen spoor van kristallisatie.

Voegt men bij een mengsel van 40 gewichtsdeelen azijnzuuranhydride en 3 gewichtsdeelen zwavelzuur 10 gewichtsdeelen manniet, dan treedt er ook langzamerhand eene werking in, doch lang niet zoo snel en zoo heftig als bij het gebruik van cellulose; giet men, nadat zij afgeloopen is, het product in water uit, dan slaat de gevormde hexacetylmanniet neer (die uit aether omgekristalliseerd bij 120° C. smelt) en in de waterige vloeistof treft men nog vrij zwavelzuur aan.

Neemt men een mengsel van 6 gew.d. azijnzuuranhydride en 3 gew.d. zwavelzuur, dat zich tot kokens verwarmd heeft en waarin de reactie op vrij zwavelzuur verdwenen is, mengt dit met 34 gew.d. anhydride en voegt dan 10 gew.d. cellulose (Zweedsch filtreerpapier) toe, dan heeft er slechts eene zeer geringe warmte-ontwikkeling plaats en de werking schijnt weldra op te houden; verwarmt men nu zacht, dan gaat zij door en ten slotte wordt alles opgelost. Giet men deze oplossing in water, dan krijgt men een neerslag van geacetyleerde producten der cellulose en in het water bevindt zich geen vrij zwavelzuur, maar sulfo-azijnzuur.

Uit deze laatste proef volgt, dat sulfo-azijnzuur, hoewel minder snel en heftig, bij de acetyleering de rol kan vervullen, die het zwavelzuur speelt; schrijft men deze toe aan de vorming van acetylzwavelzuur, dan zou men hier een acetylsulfo-azijnzuur moeten aannemen.

Al de voorafgaande proefnemingen pleiten voor de aanvankelijke vorming van acetylzwavelzuur, bij de werking van zwavelzuur op azijnzuuranhydride, terwijl de vorming van sulfo-azijnzuur op rekening der temperatuursverhooging kan worden geschoven. Uit het verdwijnen van een gedeelte van het zwavelzuur, bij de mengsels van een gelijk aantal moleculen, zou men echter geneigd kunnen zijn te besluiten, dat de vorming van sulfo-azijnzuur reeds bij de gewone temperatuur begint en na eenigen tijd een zekere grens bereikt, eene andere als het mengsel aan temperatuursverhooging wordt blootgesteld; terwijl eindelijk het geheele verbruik van het zwavelzuur tot de sulfo-azijnzuurvorming eerst zou plaats hebben bij de aanwezigheid van twee moleculen anhydride op één molecuul zwavelzuur en voldoende temperatuursverhooging. Bij de proef met manniet b.v., waar de temperatuursverhooging niet zoo sterk was, is niet al het zwavelzuur tot sulfo-azijnzuur geworden, ofschoon er anhydride genoeg aanwezig was. Veel hangt natuurlijk af van de hoeveelheden waarmede men werkt; bij groote hoeveelheden zou de warmteontwikkeling misschien voldoende kunnen worden; dit was echter niet het geval bij het gebruik van 5 gr. manniet.

Zijn dus de vorming van het sulfo-azijnzuur en de omstandigheden, die er het best geschikt toe zijn, vastgesteld, de geheele gang der reactie is nog niet duidelijk, want de vorming van acetylzwavelzuur is niet zeker; evenals het zure acetylsulfaat $CH_3 CO SO_4 H$ (acetylzwavelzuur) zou ook het neutrale acetylsulfaat $CH_3 CO SO_4 CO CH_3$ kunnen geboren worden en dit zou voor de acetyleering van alcoholen even goed geschikt kunnen zijn.

Maar al wordt ook de vorming van acetylzwavelzuur aangenomen of aangetoond, dan toch blijft de vorming van het sulfo-azijnzuur nog duister. Eenigzins vergelijkbaar is zij

met de door HOFMAN en BUCKTON *) waargenomene, uit acetonitril en acetamide door sterk zwavelzuur, waarbij de eigenaardigheid is dat hier de sulfogroep ingevoerd wordt in eene groep methyl, verbonden aan een koolstofatoom, dat met stikstof verbonden is, terwijl dit bij het anhydride geheel aan zuurstof is gebonden. Het zou mij te ver van het onderwerp voeren om hier nog andere voorbeelden, waarin dezelfde invloed werkzaam is, aan te halen.

Terwijl dus de werking van zwavelzuur op azijnzuuranhydride, voor zoover als ik deze noodig had te kennen bij de bestudeering van het acetyleeren der cellulose, voldoende is opgehelderd, knoopen zich daaraan nog vele vraagstukken van groot belang vast. Ik neem de vrijheid er met weinige woorden op te wijzen en den gang aan te duiden, dien ik bij de bestudeering van dit onderwerp denk te nemen of te laten nemen.

Onze kennis nl. van het acetylzwavelzuur is nog zeer gering. Afgezonderd is het tot nog toe niet, daar het snel door water schijnt ontleed te worden en dus niet geschikt is voor de bereiding van zouten. Ik heb getracht er een aether van te krijgen, door verhitting van acetylchloride (en van azijnzuuranhydride) met kaliumaethylsulfaat, maar tot nog toe zonder het gewenschte resultaat. Het vermoeden van OPPENHEIM †), dat er bij de werking van acetylchloride op zwavelzuur, chloorwaterstof en acetylzwavelzuur zou ontstaan, komt mij, hoe waarschijnlijk ook, niet houdbaar voor. Ik liet nl. acetylchloride op zwavelzuur werken, nu eens in zoodanige verhouding, dat er van beiden een gelijk aantal moleculen aanwezig was, dan eens zóó, dat er twee of meer moleculen van het chloride zich op één molecuul zuur bevonden, verwarmde dan tot 100° en leidde er een drogen luchtstroom door om het chloorwaterstof te verwijderen. Werd het achterblijvende nu in water gebracht en hierin de hoeveelheid vrij zwavelzuur bepaald, dan was deze aanmerkelijk

---

*) *Annalen d. Chem. u. Pharm.* C. S. 141.

†) *Ber. d. d. Chem. Ges. zu Berlin.* III. S. 737.

minder dan voor acetylzwavelzuur gevorderd wordt. Vermengde ik het overschot met azijnzuuranhydride en verwarmde, dan was de reactie op vrij zwavelzuur verdwenen. Vermengde ik het onder afkoeling met azijnzuuranhydride en bracht ik er dan cellulose in, dan trad weldra onder temperatuursverhooging eene reactie in, zoodat alles oploste; bij uitgieting dezer oplossing in water was hierin weder vrij zwavelzuur.

Eene andere reactie, waarbij het ontstaan van acetylzwavelzuur vermoed wordt, is die van BAUMSTARK *); hij liet chloorzwavelzuur op azijnzuur werken. Onder ontwikkeling van chloorwaterstof, dat hij door een stroom koolzuurgas bij 100° verwijderde, ontstond er een lichaam dat, in water gebracht, azijnzuur en zwavelzuur leverde; verhitte hij tot 120°, dan distilleerde er azijnzuur, maar het residu bleef zich tegenover water op dezelfde wijze als te voren, gedragen; nadat hij het evenwel eenigen tijd op 160° had gehouden, verkreeg hij sulfo-azijnzuur en disulfomethol-zuur.

Uit een onderzoek van KÄMMERER en CARIUS †) eindelijk schijnt te volgen, dat er twee isomere acetylzwavelzuren bestaan. Althans zij beweren, bij de verhitting van acetylchloride met zilversulfaat en behandeling van het product met water, een zuur te hebben gekregen, als strooperige vloeistof, dat zich langzamerhand door koken met water in azijnzuur en zwavelzuur omzette. Zij hebben er zouten van gemaakt en de werking van phosphorpentachloride er op nagegaan, die volgens hen zeer verschilt van die op sulfo-azijnzuur. Worden deze resultaten, die ik in de eerste plaats zal controleeren, bevestigd, dan zou er één door water zeer gemakkelijk en één minder gemakkelijk ontleedbaar acetylzwavelzuur bestaan. Zij hebben vermoedelijk het neutrale acetylsulfaat, dat gevormd moest zijn, door de behandeling met water zoodanig ontleed, dat er ééne groep acetyl is verwijderd, terwijl de andere verbonden is gebleven tot het

---

*) *Annal. d. Chem. u. Pharm.* CXL. S. 81.

†) *Annal. d. Chem. u. Pharm.* CXXXI. S. 165.

bestendigere acetylzwavelzuur. Bevestigt zich dit, dan zou hierdoor een bewijs te meer geleverd zijn voor een verschil in gedrag der beide groepen OH van het zwavelzuur en eenig licht kunnen geworpen worden op de verbinding der atomen in dit zuur, die nog altijd niet voldoende is opgehelderd.

Leiden, April 1881.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-RAKELS.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.,

INGEKOMEN BIJ DE

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN,

TE AMSTERDAM.

VAN APRIL 1880 TOT EN MET MAART 1881.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1881.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1880. N^{0}. 68—69. 8^{0}.

Nova Acta der kais. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1880. Band XLI. Pars. 2. N^{0}. 6. 4^{0}.

Inhoud:

F. W. KLATT. Die Compositae des Herbarium Schlagintweit aus Hochasien und südlichen indischen Gebieten.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1880. Band XXVI. N^{0}. 9—11. Ergänzungsheft N^{0}. 62—63. 4^{0}.

TH. L. W. VON BISCHOFF. Das Hirngewicht des Menschen. Bonn 1880. 8^{0}.

Abhandlungen der historischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1880. Band XV. Abth. 2. 4^{0}.

Inhoud:

W. PRAYER. Beiträge und Erörterungen zur Geschichte des deutschen Reichs in den Jahren 1330—1334.

E. RITTER. Politik und Geschichte der Union zur Zeit des Ausgangs Rudolfs II und der Anfänge des Kaisers Matthias.

F. WÜRDINGER. Beiträge zur Geschichte der Gründung und der ersten Periode des bayerischen Hausritterordens vom heiligen Hubertus 1444—1709.

Das Haus Wittelsbach und seine Bedeutung in der deutschen Geschichte, herausgegeben von der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1880. 4^{0}.

ROCKINGER. Die Pflege der Geschichte durch die Wittelsbacher. Akademische Festschrift zur Feier des Wittelsbacher-Jubiläums. München 1880. 4^{0}.

A. ZITTEL. Ueber den geologischen Bau der libyschen Wüste. Festrede gehalten in der öffentlichen Sitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1880. 4^{0}.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1880. Heft 2—3. 8°.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1880. Heft 4. 8°.

Verhandlungen des historischen Vereines von Oberpfalz und Regensburg. Stadtamhof 1879. Band XXXIV. 8°.

Jahreshefte des Vereins für Vaterländische Naturkunde in Württemberg. Stuttgart 1880. Jahrg. 36. 8°.

ZWITSERLAND.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Bern. 1879. Jahresbericht 1877/79. 8°.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1878—1879. Bern 1879—1880. 8°.

ITALIË.

Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. 1879. Tomo XIX. 4°.

Inhoud:

D. RAGONA. Andamento annuale della umidità relativa e assoluta.

G. GENERALI. Micosi delle vie aeree nei colombi.

A. FAVARO. Sulla interpretazione matematica del papiro Rhind, pubblicato ed illustrato dal prof. A. Eisenlohr.

L. MALAVASI. Esame di alcuni esperimenti in favori della origine chimica della elettricità nelle pile e nuovo caso di produzione d'ozono.

M. MANFREDI. Esame anatomico di un piccolo settore di neoplasia iridocigliare e considerazioni critiche per la relativa diagnosi di tubercolosi primitiva dell' iride.

L. MALAVASI. D'una rappresentazione grafica del movimento ondulatorio.
A. CARUCCIO. Sovra una specie del genere solenophorus, forse nuova, trovata nel python natalensis Smith.
A. FAVARO. Appendice alle notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni.
A. FAVARO. Le aggiunte autografe di Galileo al Dialogo sopra i due massimi sistemi nell' esemplare posseduto dalla Biblioteca del Seminario di Padova.
E. GIOVANARDI. Contribuzione alla dottrina dell' infanticidio.
G. FRANCIOSI. Il volere. Carme.
P. RICCARDI. Cenni su la vita e le opere di Geminiano Rondelli.
C. CAMPORI. Geminiano Poletti.
F. BORLOLOTTI. Del primitivo cubito egizio e dé suoi geometrici rapporti colle altre unità di misura e di peso egiziane e straniere.

Memorie del Regia Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia 1878—1879. Vol. XX. Parte 2—3. Vol. XXI. Parte I. fol.

Inhoud. Vol. XX. Parte 2:

G. DE LEVA. Le prime sessioni del concilio di Trento.
A. PAZIENTI. Considerazioni generali intorno alla termodinamica.
G. VELUDO. Dichiarazione di un monumento sepolcrale cristiano, recentemente scoperto.
G. A. PIRONA. Sulla fauna fossile giurese del monte Cavallo in Friuli.
G. FRESCHI. Di che guadagni vada l'agricoltura debitrice alla chimica agricola e all' esperienza scientifica.
E. F. TROIS. Ricerche zootomiche e istologiche sul Luvarus imperialis.
A. DE ZIGNO. Annotazioni paleontologiche.

Vol. XX. Parte 3:

F. MARZOLO. Intorno ad una famiglia di sedigiti.
F. CAVALLI. La scienza politica in Italia.

Vol. XXI. Parte I.:

G. DE LEVA. Le prime sessioni del concilio di Trento.
A. PAZIENTI. Considerazioni di termodinamica.
F. CAVALLI. La scienza politica in Italia.
A. DE ZIGNO. Annotazioni paleontologiche.
G. FRESCHI. A quali condizioni il complicato organismo dell' agricoltura, basata sul prato e sul letame, possa partecipare ai vantaggi dell' industria, che credonsi privilegio dell' agricoltura, basata esclusivamente sui concimi chimici.

B. TURAZZA. Delle formole piu appropriate pel calcolo degli scoli delle basse pianure, e del modo di valutarne la portata massima.

P. MARZOLO. Anomalie nell' apparato genito-urinario di una donna mancante di utero.

Atti del reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia 1877—1880. Serie 5. Tomo IV. Disp. 10. Tomo V. Disp. 1—10. Tomo VI. Disp. 1—9. 8°.

Atti della Societa Toscana di scienze naturali. Pisa 1880. Vol. IV. Fasc. 2. 8°.

Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel. Leipzig 1880. Band II. Heft 2. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Nova acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Upsaliae 1879. Serie 3. Vol. X. 4°.

Inhoud:

O. PETTERSSON. Untersuchungen über die Molekular-Volumina einiger Reihen von isomorphen Salzen.

G. STEPHENS. Some runic stones in northern Sweden, from the papers of the late prof. C. Säve.

L. F. NILSON und O. PETTERSSON. Ueber Darstellung und Valenz des Berylliums.

G. EISEN. On the anatomy of Ocnerodrilus.

M. FALK. Method to find the greatest common measure of two rational integral functions of x.

H. T. DAUG. Formules pour la détermination des équations d'une courbe dont on connait diverses propriétés relatives à la courbure ou à la torsion.

H. H. HILDEBRANDSSON et C. A. RUNDLUND. Prise et débâcle des lacs en Suède, automne 1871, printemps 1877.

G. STEPHENS. On the dialect of the first book printed in Swedish.

M. FALK. Sur la méthode d'élimination de Bezout et Cauchy.

P. GROTH und L. F. NILSON. Ueber Platojodonitrite, krystallographische und chemische Untersuchung.

C. F. E. BJÖRLING. Ueber entsprechende Singularitäten in algebraischen ebenen Curven.

O. PETTERSEN. Experimentelle Methoden und Untersuchungen in der physikalischen Chemie.

Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Upsal 1877—78. Vol. VIII—IX. fol.

RUSLAND.

Bulletin de l'Académie impérial des sciences de St. Pétersbourg. 1880. Tome XXVI. N°. 3. fol.

Compte-rendu de la Commission impériale archéologique pour l'année 1877. St. Pétersbourg 1880. gr. 4°. Avec Atlas. Plano.

Bulletin de la Société impériale des naturalistes de Moscou. 1880. Année 1879. N°. 4. Année 1880. N°. 1. 8°.

Acta Societatis scientiarum fennicae. Helsingforsiae 1880. Tomus XI. 4°.

Inhoud:

S. LEMSTRÖM. Redogörelse för justering och undersökning af de enligt kejserliga Senatens uppdrag för finska statens räkning från Frankrike och Sverige anskaffade normal-mått och vigter.

E. NEOVIUS. Försök att med geometriens tillhjelp utveckla och förallmänliga begreppen om analysens grundoperationer.

E. BONSDORFF. Method att utveckla relationer emellan binära formers covarianter (resp. invarianter).

———— Om binära formers discriminanter.

T. G. AMINOFF. Syrjänische Hochzeitsgesänge, gesammelt von M. A. Castrén.

K. A. R. TÖTTERMAN. Varianten zum Propheten Hosea.

E. SOURANDER. Sur le discriminant de l'équation dont dépendent les inégalités séculaires des planètes.

G. MITTAG-LEFFLER. Funktions teoretiska studier.

F. GUSTAFSSON. De vocum in poëmatis graecis consonantia.

E. BONSDORFF. Ueber cyklisch-projektivische systeme.

F. GUSTAFSSON. De codicibus Boëthii de institutione arithmetica librorum Bernensibus.

H. GYLDÈN. Versuch einer mathematischen Theorie zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne.

O. DONNER. Die gegenseitige Verwandschaft der Finnisch-Ugrischen Sprachen.

R. TIGERSTEDT. Studiën über mechanische Nervenreitzung.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten. Helsingfors 1879. Häftet 32. 8°.

Observations météorologiques publiées par la Société des sciences de Finlande. Helsingfors 1880. Année 1878. 8°.

A Z I Ë.

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Yokohama August 1880. gr. 4°.

N O O R D - A M E R I K A.

J. A. Allen. History of North American pinnipeds. A monograph of the walruses, sea-lions, sea-bears and seals of North America. Washington 1880. 8°. (Miscellaneous publications. N°. 12).

The American journal of otology. New-York 1880. Vol. II. N°. 4. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Tomo V. N°. 164—175. fol.

Z U I D - A M E R I K A.

Anales de la Sociedad cientifica argentina. Buenos Aires 1880. Tomo X. Entr. 4. 8°.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la republica Argentina. Cordoba 1879. Tomo III. Entr. 2—3. 8°.

A U S T R A L I Ë.

Proceedings of the Linnean Society of N. S. W. Sydney 1879. Vol. IV. Part 3. 8°.

AANGEKOCHT.

Journal des Savants. Paris. Octobre 1880. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1880. 2e Série. Tome IV. Mai. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1880. 5th Series. Vol. VI. N°. 35. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1880. 5th Series. Vol. X. N°. 63. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. St. 43—47. Nachrichten. N°. 16—17. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1880. Neue Folge. Band XI. Heft 2. Beiblätter. Band IV. St. 10. 8°.

Dingler's Polytechnisches Journal. Augsburg 1880. Band 238. Heft 3. 8°.

Bibliothèque universelle et revue suisse. Lausanne 1880. 3e Période. Tome VIII. N°. 10. Archives. 3e Période. Tome IV. N°. 10. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND DECEMBER 1880.

Memoriaal van de marine. Amsterdam 1880. 25e Afl. fol.

Volksalmanak voor het jaar 1881, uitgegeven door de Maatschappij tot nut van 't algemeen te Amsterdam. 8°.

K. W. VAN GORKOM. De Oost-Indische cultures in betrekking tot handel en nijverheid. Amsterdam 1881. Deel I. 8°.

De Navorscher. Amsterdam 1880. Nieuwe Serie. 13e Jaarg. N°. 10. 8°.

Tijdschrift, uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1880. 4e Reeks. Deel IV. Afl. 11. 8°.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden, in het tijdvak van den eersten Juli 1879 tot de laatste dagen der maand Juni 1880, uitgebracht door H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN. Amsterdam 1880. 8°.

Kitābo-'l-adhbād sive liber de vocabulis arabicis quae plures habent significationes inter se oppositas auctore Abu Bekr ibno-'l-Anbāri; ex unico qui superest codice Lugdunensi edidit atque indicibus instruxit M. TH. HOUTSMA. Lugduni Bat. 1881. 8°.

Al-Moschtabih, auctore Schamso'd-din Abu Abdallah Mohammed ibn Ahmed ad-Dhahabi, e codd. mss. editus a Dr. P. DE JONG. Lugduni Bat. 1881. 8°.

Catalogus der tentoonstelling van voorwerpen, betrekking hebbende op het vorstelijk stamhuis Oranje-Nassau en op de Wapen-, Geslacht- en Zegelkunde in het algemeen, onder het hooge beschermheerschap van Z. M. den Koning. In de Gothische zaal te 's Gravenhage Augustus en September 1880. 's Gravenhage 1880. 8°.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool, uitgegeven door F. C. DON-

DERS en TH. W. ENGELMANN. Utrecht 1880. 3e Reeks. Deel V. Afl. 3. 8°.

Bijdrage tot een middel- en oudnederlandsch woordenboek, uit vele glossaria en andere bronnen verzameld door A. C. OUDEMANS SR. Arnhem 1870—1880. 7 Dln. 8°.

Aanwinsten van het penningkabinet van het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde te Leeuwarden, 1879—1880. 8°.

Lectiones Horatianae. Scripsit Aemilius Baehrens. Groningae 1880. 4°.

Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen 1879—1880. Groningen 1880. 8°.

JOS. HABETS. De Studiebeurzen in Nederlandsch Limburg. Een historisch overzicht der privaatstichtingen voor onderwijs. Venloo 1881. 8°.

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het geneeskundig staatstoezigt in het jaar 1879. 's Gravenhage 1880. 4°.

Verslag aan den Koning over de openbare werken in het jaar 1879. 's Gravenhage 1880. 4°.

Statistiek van het koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand October 1880. 's Gravenhage 1880. fol.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1880. 2e Série. Tome L. N°. 9—11. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. 3e Série. Tome XV. N°. 10. 8°.

Textes explicatives des lévés géologiques des planchettes de Boisschot et d'Aerschot par M. le baron O. VON ERTBORN avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8°. et plano.

L. NIESTEN. Notices astronomiques. Les astéroïdes. Des phénomènes physiques accompagnant les passages de Mercure sur le soleil. Astéroïdes découverts en 1880. Comètes découvertes en 1880. Comètes en 1881. Bruxelles 1881. kl. 8°.

JULES MAC LEOD. Notice sur l'appareil venimeux des aranéides. 8°. (Extrait des archives de Biologie. Vol. I.)

A. PREUDHOMME DE BORRE. Étude sur les espèces de la tribu des féronides qui se rencontrent en Belgique. 8°. (Extrait des annales de la Société entomologique de Belgique. Tome XXIII).

J. MOREL. Handboek der anorganische scheikunde. Gent 1880. 2e uitgave. 8°.
(Uitgave van het Willems-fonds).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1880. Tome XCI. N°. 21—23. 4°.

Journal de l'École polytechnique. Paris 1880. Tome XXVIII. Cahier 47. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1880. 2e Série. Tome IX. N°. 47—50. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1880. Tome XXVII. Revue bibliographique C. 8°.

Journal de la Société nationale et centrale d'horticulture de France. Paris 1880. 3e Série. Tome II. Octobre. 8°.

V. DURUY. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1880. Livr. 143—146. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1881. Vol. V. N°. 218—221. 4°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1880. 3e Année. N°. 11—12. 8°.

F. CHEVREMONT. Jean Paul Marat. Esprit politique accompagné de sa vie scientifique, politique et privée. Paris 1880. 2 Tomes. 8°.

———— Marat. Index du bibliophile et de l'amateur de peintures, gravures, etc. Paris 1876. 8°. (Tiré à cent exemplaires).

———— Placards de Marat, l'ami du peuple. Paris 1877. 8°.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Paris—Bordeaux 1880. 2e Série. Tome IV. Cahier 1. 8°.

Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. 1880. 8e Série. Tome II. 1e Semestre. 8°.

Table alphabétique des matières contenues dans les dix volumes de la 7e Série des Mémoires de l'Académie des

sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse: 1880. 8°.

Recueil de l'Académie de Législation de Toulouse. 1875. Tome XXIV. 8°.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. 1879. Mémoires de la section de médecine. Tome V. Fasc. 2. 4°.

Inhoud:

E. MASSE. De l'influence de l'attitude des membres sur leurs articulations au point de vue physiologique.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. 1880. Mémoires de la section des sciences. Tome IX. Fasc. 3 4°.

Inhoud:

A. SABATIER. Comparaison des ceintures thoracique et pelvienne dans la série des vertébrés.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. 1880. Mémoires de la section des lettres. Tome VI. Fasc. 4. 4°.

Inhoud:

CROISET. Un ascète païen au siècle des Antonins. Peregrinus Protée.

CH. REVILLOUT. Un maitre de conférences au milieu du XVII siècle. Jean Soudier de Richesource.

A. GERMAIN. Les maîtres chirurgiens de l'école de chirurgie de Montpellier.

V. ARAGON. Un poète catalan du XVIIe siècle. — Vicens Garcia, Rector de Vallfogona.

——— Voltaire et le dernier gouverneur du chateau de Salses.

CH. REVILLOUT. Note additionnelle à l'étude sur Richesource.

Mémoires de la Société Académique des sciences, arts etc. de Saint-Quentin. 1880. 4e Série. Tome II. 8°.

Inhoud:

GARCIN. Les maladies contagieuses en général et les affections charbonneuses en particulier, considérées au point de vue de la nature du virus.

VERRIER. De l'arrosage des villes pendant l'été.
DUBUS. Catalogue méthodique de Lepidoptères de l'arrondissement de St. Quentin.
CH. CONTENT. L'avenir de la physique moderne.
J. PILLOY. Essai sur la classification des sépultures dites franco-mérovingiennes dans le département de l'Aisne.
——— Fouilles du cimétière franco-mérovingien de Fontaine Uterte.
——— Fouilles du cimetière de Marteville.
J. MALÉZIEUX. Les carrières du vieux Saint-Quentin.
E. LEMAIRE. Essai sur l'histoire de la ville de Saint-Quentin.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique de la Société d'agriculture, sciences et arts de l'arrondissement de Valenciennes. 1880. Tome XXXIII. N°. 10. 8°.

Bulletin historique de la Société des antiquaires de la Morinie. St. Omer 1880. Nouvelle Série. Livr. 114. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1886. Vol. XLI. N°. 1. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1880. New Series. Vol. II. N°. 12. 8°.

The journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1880. Vol. XII. Part. 3—4. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1880. Vol. III. N°. 6. 8°.

DUITSCHLAND.

57ster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1880. 8°.

Verhandlungen des Naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens. Bonn 1879—1880. 4e. Folge. Jahrg. 6. 2te Hälfte. Jahrg. 7. 1ste Hälfte. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1880. 3te Jahrg. N°. 70—71. 8°.

XVI und XVII. Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden. 1879—1880. Nebst Nachtrag zum XVII. Jahresbericht. 8°.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. 1880. Neue Folge. Band II. Heft 5. 8°.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Wiesbaden 1878—1879. Jahrg. 31—32. 8°.

ITALIË.

Memorie dell' Accademia delle scienze, dell' Istituto di Bologna. Serie 3. Tomo X. Fasc. 3—4. 4°.

Inhoud. Fasc. 3:

A. BIGHI. Sui fenomeni elettrici delle bolle di Canton.

——— Descrizione ed uso di una macchina d'Holtz de costruzione speciale.

——— Sulla dilatazione dei coibenti armati per effetto della carica.

A CAVAZZI. Analisi quantitativa dei miscugli, contenenti solfuri, carbonati solfati e iposolfiti alcalini.

P. RICCARDI. Cenni sulla storia della geodesia in Italia dalle prime epoche fin oltre alla metà del secolo XIX.

A. RAZZABONI. Alcune proprieta delle superficie a linee di curvatura piane.

Fasc. 4:

C. RAZZABONI. Del moto delle acque in vasi communicante per mezzo di lunghi tubi.

F. ASCHIERI. Sopra un particolare complesso di rette del secondo grado.

S. TRINCHESE. Studi sulla fecondazione.

P. SELMI. Dissociazione dei sali a base volatile durante l'evaporazione ecc.

——— Sull' azione a bassa temperatura di alcuni fermenti non organizzati.

G. B. ERCOLANI. Della placenta nei pesci cartilaginosi e nei mammiferi e delle sue applicazioni alla tassonomia zoologica e all' antropogenia.

Memorie del Reale Istituto Lombardi di scienze e lettere. Classi di lettere e scienze morali e politiche. Milano 1880. Vol. XIV. Fasc. 1. 4°.

Inhoud:

BUCCELLATI. La scuola francese e la scuola italiana.
——— La conversione dei beneficî curati.
——— La liberta di stampa moderata dalla legge.
GALLAVRESI. I diritti del conjuge superstite nella successione del defunto.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Milano 1879. Serie 2. Vol. XII. 8°.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Vol. II. Filosofia e Filologia. Vol. III. 8°.

C. GIAMBELLI. Rendiconti delle Observationes criticae ad M. Tullii Ciceronis epistolas, del Sign. BOOT. 8°. (Estratto dalla Rivista de filologia ed istruzione classica. Anno IX.).

PORTUGAL.

J. F. J. BIKER. Supplemento a collecção dos tratados, convençoes, contratos e actos publicos celebrados entre a corôa de Portugal e as mais potencias desde 1640. Lisbao 1880. Tomo XIV, XVIII. 8°.

NOORD-AMERIKA.

Bulletin of the U. S. geological and geographical survey of the Territories. Washington 1880. Vol. V. N°. 4. 8°.

Astronomical papers prepared for the use of the American ephemeris and nautical almanac. Washington 1880. Vol. I. Part. 3. (Velocity of light). 4°.

Boletin del Ministerio de Fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Tomo V. N°. 176—195. fol.

ZUID-AMERIKA.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1880. Tome X. Entr. 5. 8°.

AANGEKOCHT.

W. PLEYTE. Nederlandsche oudheden van de vroegste tijden tot op Karel den Groote. Leiden 1880. Afl. 8. gr. 4°.

Journal des savants. Paris November 1880. 4°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1880. 5e Série. Tome XXI. Novembre. 8°.

The London, Edinburgh and Dublin, philosophical magazine and journal of science. London 1880. 5th Series. Vol. X. N°. 64. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1880. 5th Series. Vol. VI. N°. 36. 8°.

Mittheilungen der k. k. Central-Commission zur Erforschung und Erhaltung der kunst- und historischen Denkmale. Wien 1880. Neue Folge. Band VI. Heft 4. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1880. N°. 48—51. Nachrichten. N°. 19. 8°.

F. H. TROSCHEL. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1880, Jahrg. 47. Heft 1. 8°.

G. WIEDEMANN. Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1880. Neue Folge. Band XI. Heft 3. Beiblätter. Band IV. N⁰. 11. 8⁰.

DINGLER's polytechnisches Journal. Augsburg 1880. Band 238. Heft 4—5. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Genève 1880. Archives. 3e Période. Tome IV. N⁰. 11. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JANUARI 1881.

Bouwkundige Bijdragen, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der Bouwkunst. Amsterdam 1880. Deel XXVI. St. 2. 4⁰.

Association internationale pour l'eau potable. Sous le haut patronage de l.l. M.M. les rois des Pays-Bas et de la Belgique. Séance générale tenue à Turin le jeudi 9 Septembre 1880, à l'occasion du 3e Congrès International d'Hygiène. Amsterdam 1880. 4⁰.

P. M. BRUTEL DE LA RIVIÈRE. Handleiding tot de beoefening der Natuurkunde Amsterdam 1881. Hoofdstuk V. (Magnetisme en Electriciteit). 8⁰.

J. C. HOOIJKAAS. Repertorium op de koloniale litteratuur of systematische inhoudsopgaaf van hetgeen voorkomt over de Koloniën, (beoosten de Kaap) Amsterdam 1880. St. 4. Deel II. 2de Helft. 8⁰.

Congrès périodique international des sciences médicales.

6me session, Amsterdam, Septembre 1879. Compte-rendu publié avec le concours des secrétaires des sections par M. GUYE, Secrétaire général et M. M. DE PERROT, STOKVIS et ZEEMAN, Membres du comité de publication. Amsterdam 1880. roy. 8°.

Jaarboek van het mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indië. Amsterdam 1880. Jaarg. 9. Deel II. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1880. N°. 7—8. 8°.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des sciences à Harlem. 1880. Tome XV. Livr. 5. 8°.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, over het jaar 1880. Leiden 1880. 8°.

P. VAN ROMBURGH. Over isomere chloorsubstitutieproducten van propaan en propyleen. Amsterdam 1881. (Academisch proefschrift). 8°.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1880. Afl. 1. 1ste en 2de ged. 4°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het Kon. Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch Indië. 's Gravenhage 1880. 4e Reeks. Deel IV. St. 4. 8°.

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1881. Deel XXIV. Afl. 1. 8°.

Verslag omtrent eenige buitenlandsche militair-geneeskundige applicatiescholen en hospitalen, bezocht door W. P. RUYSCH. 's Gravenhage 1880. 8°.

Beschrijving der schilderijen van het Rijks Museum te Amsterdam, met historische aanteekeningen en facsimilés der naamteekens. 's Gravenhage 1880. 8°.

Jaarboek der Rijks-Universiteit te Utrecht 1879—1880. Utrecht 1880. 8°.

Bijbelsche geschiedenissen van F. L. ZAHN. Vertaald in de Papoesch-Noefoorsche taal door J. G. GEISLER, herzien door J. L. VAN HASSELT. Utrecht 1880. 8°.

Catalogus der nieuwe Bibliotheek behoorende tot het Stedelijk Museum te Alkmaar. 1880. 8°.

Handelingen der Nederlandsche Vereeniging voor Psychiatrie. 's Hertogenbosch 1880. Deel II. N°. 7. 8°.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de Zeeuwsche stroomen enz., waargenomen in de maand Mei 1880. 's Gravenhage 1880. fol.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand November 1880. 's Gravenhage 1880. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1880. Deel XXV. Afl. 9—10. 8°.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1880. Nieuwe Serie. Deel IX. Afl. 5—6. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique. Bruxelles 1880. 2e Série. Tome L. N°. 12. 8°.

Annuaire de l'Académie Royale des Sciences de Belgique. Bruxelles 1881. 47e Année. 8°.

Bulletin de l'Académie Royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1880. 3e Série. Tome XIV. N°. 11. 8°.

F. PLATEAU. Recherches physiologiques sur le coeur des crustacées décapodes. 8°.
(Extrait des Archives de Biologie. Vol. I.).

———— Procédé pour la préparation et l'étude des poches aériennes des oiseaux. 8°.
(Extrait du Zoologischer Anzeiger 1880. N°. 57).

Correspondance botanique. Liste des jardins, des chaires, des musées, des revues et des sociétés de botanique du monde. Liège 1880. 8e Édition. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1880. Tome XCI. N°. 24—26. Tome XCII. N°. 1—2. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome IX. N°. 51—52. Tome X. N°. 1—3. 8°.

Nouvelles Archives du Muséum d'histoire naturelle. Paris 1879—1880. 2e Série. Tome II. Fasc. 2. Tome III. Fasc. 1. 4°.

Inhoud: Tome II. Fasc. 2.

B. RENAULT. Structure comparée de quelques tiges de la flore carbonifère.

Tome III. Fasc. 1.

H. E. SAUVAGE. Étude sur la faune ichthyologique de l'Ogooué.
V. BERTIN. Révision des Garidées du Muséum d'histoire naturelle.
HUET. Recherches sur les écureuils africains.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1880. Tome XXVII. Comptes rendus N°. 5. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1880. Tome VIII. N°. 6. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1880. 6e Année. Vol. V. N°. 222—227. 4°.

Revue international des sciences biologiques. 4e Année. N°. 1. 8°.

V. DURUY. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1880. Livr. 147—152. roy. 8°.

Annales du Musée Guimet à Lyon. Paris 1880. Tome I. 4°.

Musée Guimet. Catalogue des objets exposés précédé d'un aperçu des religions de l'Inde, de la Chine et du Japon. Lyon 1880. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1880. Vol. CLXXI. Part. 2. 4°.

Inhoud:

R. T. GLAZEBROOK. Double refraction and dispersion in Iceland spar: an experimental investigation, with a comparison with HUYGHEN's construction for the extraordinary wave.

C. SCHORLEMMER. On the normal paraffins. Part III.

W. M. HICKS. On the motion of two spheres in a fluid.

W. C. WILLIAMSON. On the organization of the fossil plants of the coal-measures. Part X. Including an examination of the supposed radiolarians of the carboniferous rocks.

W. ELLIS. On the relation between the diurnal range of magnetic declination and horizontal force, as observed at the Royal Observatory, Greenwich, during the years 1841 to 1877, and the period of solar spot frequency.

W. SPOTTISWOODE. On the sensitive state of vacuum discharges.

W. DE W. ABNEY. On the photographic method of mapping the least refrangible end of the solar spectrum.

W. HUGGINS. On the photographic spectra of stars.

G. F. FITZGERALD. On the electromagnetic theory of the reflection and refraction of light.

G. H. DARWIN. On the secular changes in the elements of the orbit of a satellite revolving about a tidally distorted planet.

Memoirs of the Royal Astronomical Society. London 1880. Vol. XLV. 4°.

Inhoud:

SOUILLART. Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter.

W. H. M. CHRISTIE. On the systematic errors of the Greenwich North Polar distances.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1880. Vol. XLI. N°. 2. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N°. 1. 8°.

Transactions of the Linnean Society of London. 1880. (Botany) 2d Series. Vol. I. Part 7—9. 4°.

Inhoud:

7. W. PHILLIPS. On a new species of Helvella.

7. 8. 9. CH. BARON CLARKE. A review of the ferns of Northern India. Part 1—3.

9. G. HENSLOW. On the origin of the so-called scorpioid cyme.

Transactions of the Linnean Society of London. 1879. (Zoology) 2d Series. Vol. II. Part. 1. 4°.

Inhoud:

H. CARPENTER. On the genus *Actinometra* MULL. with a morphological account of a new species (A.) polymorpha from the Philippine Islands.

Journal of the Linnean Society of London. 1880. (Botany) N°. 104—107. (Zoology) N°. 80—83. 8°.

Astronomical and magnetical and meteorological observations made at the Royal Observatory, Greenwich, in the year 1878. London 1880. 4°.

Journal of the Royal Dublin Society. Dublin 1874—1875. Vol. VI. N°. 42—43. 8°.

OOSTENRIJK.

Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880. (Mathematisch-naturwissensch. Classe) Band XL, XLII. 4°.

Inhoud, Band XL:

A. BITTNER. Der geologische Bau von Attika, Boeotien, Lokris und Parnassis.

FR. HEGER. Barometrische Höhenmessungen in Nord-Griechenland.

M. NEUMAYR. Der geologische Bau des westlichen Mittel-Griechenlands.

FR. TELLER. Der geologische Bau der Insel Euboea.

——— Geologische Beschreibung des südöstlichen Thessalien.

V. HILBER. Diluviale Landschnecken aus Griechenland.

M. NEUMAYR. Uber den geologischen Bau der Insel Kos und über die Gliederung der jungtertiären Binnenablagerungen des Archipels.

——— Geologische Beobachtungen im Gebiete des thessalischen Olymp.

L. BURGERSTEIN. Geologische Untersuchungen im südwestlichen Theile der Halbinsel Chalkidike.

M. NEUMAYR. Geologische Untersuchungen über den nördlichen und östlichen Theil der Halbinsel Chalkidike.

FR. TELLER. Geologische Beobachtungen auf der Insel Chios.

F. CALVERT und M. NEUMAYR. Die jungen Ablagerungen am Hellespont.

A. BITTNER, M. NEUMAYR und FR. TELLER. Überblick über die geologischen Verhältnisse eines Theils der ägäischen Küstenländer.

Band XLII:

DESCHMANN und HOCHSTETTER. Prähistorische Ansiedelungen und Begräbnissstätten in Krain.

STEINDACHNER. Zur Fisch-Fauna des Cauca und der Flüsse bei Guayaquil.

BRAUER. Die Zweiflügler des Kaiserlichen Museums zu Wien. I.

FRITSCH. Jährliche Periode der Insectenfauna von Osterreich-Ungarn. V.

HOEFER. Die Erdbeben Kärnthens und deren Stosslinien.

HOERNES. Materialien zu einer Monographie der Gattung Megalodus mit besonderer Berücksichtigung der mesozoischen Formen.

TINTER. Bestimmung der Polhöhe auf dem Observatorium der k. k. technischen Hochschule in Wien.

MANZONI. Echinodermi fossili della Molassa serpentinosa e Supplemento agli echinodermi fossili dello schlier delle colline di Bologna

Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880. *Mathem.-naturwissenschaftliche Classe.* 1ste Abth. Band LXXXI. Heft 1—5. Band LXXXII. Heft 1—2. 2te Abth. Band LXXXI. Heft 4—5. Band LXXXII. Heft 1—2. 3te Abth. Band LXXXI. Heft 4—5. Band LXXXII. Heft 1—2. 8°.

Register zu den Bänden LXXVI bis LXXX der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880. 8°.

Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880. *Philosophisch-historische Classe.* Band XCVI. Heft 2—3. 8°.

Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880. Jahrg. 30. 8°.

Archiv für österreichische Geschichte, herausgegeben von der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880. Band LX. 2te Hälfte. Band LXI. 1ste en 2te Hälfte. Band LXII. 1ste Hälfte. 8°.

DUITSCHLAND.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1880. Heft 7—8. Oblong.

R. VIRCHOW. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1880. Band LXXXII. Heft 2—3. 8°.

MAX COHN. Das Internationale Privatrecht. Ein Leitfaden von T. M. C. ASSER. Berlin 1880. 8°.

Danzig in naturwissenschaftlicher und medizinischer Beziehung. Gewidmet den Mitgliedern und Theilnehmern der 53 Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte. Danzig 1880. 8°.

R. HOPPE. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1880. Theil LXV. Heft 4. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1880. 3te Jahrg. N°. 72—74. 8°.

PETERMANN's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1880. Band XXVI. N°. 12. 4°

Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1880. Band XV. 2te Abth. 4°.

Inhoud

FR. JOSEPH LAUTH. Siphtas und Amenmeses.
——————— Die Phönixperiode.
W. MEYER. Die Urbinatische Sammlung von Spruchversen des Menander Euripides und anderer.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1880. Band XIII. 3te Abth. 4°.

Inhoud:

TH. L. W. VON BISCHOFF. Beiträge zur Anatomie des Gorilla.
K. M. VON BAUERNFEIND. Das Bayerische Präcisions-Nivellement.
TH. RITTER VON OPPOLZER. Ueber die Berechnung der wahren Anomalie in nahezu parabolischen Bahnen.
TH. L. W. VON BISCHOFF. Ueber die äusseren weiblichen Geschlechtstheile des Menschen und der Affen.
K. M. VON BAUERNFEIND. Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction. Erste Mittheilung enthaltend die Feststellung von Thatsachen.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1879. München 1880. 8°.

Verhandlungen der physikal.-medic. Gesellschaft in Würzburg. 1881. Neue Folge. Band XV. Heft 1—2. 8°.

Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Stuttgart 1880. Band I. 1ste Hälfte. Band II. 1ste Hälfte. roy. 8°.

ZWITSERLAND.

Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles. Lausanne 1880. 2e Série. Vol. XVII. N°. 84. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1880. Transunti. Serie 3. Vol. V. Fasc. 1—3. 4°.

T. TARAMELLI. Monografia stratigrafica e paleontologica del lias nelle provincie Venete. Venezia 1880. 4°.
(Appendice al Tomo V, Serie 5 degli Atti dell' Istituto Veneto di science, lettere ed arti).

Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia 1879—80. Serie 5. Tomo VI. Disp. 10. 8°.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. 1879—1880. Vol. XV. Disp. 1—8. 8°.

Boletino dell' Osservatorio della Regia Universita di Torino. Anno XIV (1879) 4°. Oblong.

Atti della Societa Toscana di scienze naturali. Processi Verbali di 14 Novembre 1880. 8°.

SPANJE EN PORTUGAL.

Observaciones meteorológias efectuadas en el Observatorio de Madrid durante el ano 1876, 1877, 1878. Madrid 1878. 8°.

J. F J. BIKER. Supplemento á collecçao dos tratados, convenções, contratos e actos publicos celebrados entre a cor a de Portugal e as mais potencias desde 1640. Lisboa 1880. Tomo XV, XVII, XIX, XX, XXI. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

N. P. ANGELIN. Palaeontologia scandinavica. Holmiae 1878. P. 1. Crustacea formationis transitionis. Fasc. I—II. (Cura et auspiciis Academiae regiae scientiarum Suecanae).

J. SPANBERG. Entomologisk tidskrift. Stockholm 1880. Band I. Häft 3—4. 8°.

Tromso Museums Aarshefter. Tromsö 1880. T. III. 8°.

RUSLAND.

Materialien zu einer Klimatologie des Kaukasus gesammelt und herausgegeben von A. MORITZ, Director des Obser-

vatoriums in Tiflis. Tiflis 1877—1880. Abth. I. (Meteor. Beobachtungen 1871—1879. Band I, II. 1—4. kl. 4°.

Magnetische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums im Jare 1879, herausgegeben von J. MIELBERG, Director des Observatoriums. Tiflis 1880. kl. 4°.

AZIË.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. Vol. XLIX. Part. 1. N°. 2—3. Part. 2. N°. 2. 8°.

NOORD-AMERIKA.

Memoirs of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Cambridge 1880. Vol. VI. N°. 1. Vol. VII. N°. 2. Part. 1. 4°.

Inhoud, Vol. VI. N°. 1:

J. D. WHITNEY. The auriferous gravels of the Sierra Nevada of California.

Vol. VII, N°. 2, Part. 1:

J. D. WHITNEY. The climatic changes of later geological times: a discussion based on observations made in the Cordilleras of North America.

Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Cambridge 1880. Vol. VI. N°. 8—11. 8°.

Annual report of the curator of the Museum of comparative zoology at Harvard College for 1879—1880. Cambridge 1880. 8°.

35th Annual report of the Director of the Astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1881. 8°.

Statistics of the jews of the United States, compiled under the authority of the board of delegates of american israelites, and the union of American Hebrew congregations. Philadelphia 1880. 8°.

J. A. HUGUET-LATOUR. Histoire de le paroisse de la sainte famille de Jesus-Marie Joseph de Boucherville. Montréal 1878. 8°.

———————— Origine, utilité et progrès des institutions catholiques de Montréal. Montréal 1878—79. 8°.

———————— Province de Manitoba et territoire du Nord-Ouest du Canada. Informations à l'usage des émigrants. Ottowa 1878. 8°.

———————— Southern Manitoba and Turtle mountain country. 8°.

TH. SPENCE. The prairie lands of Canada, presented to the world as a new and inviting field of entreprise for the capitalist and new superior attractions and advantages as a home for immigrants compared with the western prairies of the United States. Montreal 1880. 8°.

Canadian public lands. Speech delivered in the house of commons by Mr. J. B. PLUMB. 1880. 8°.

Proceedings of the California Academy of science at a reception given to the captain and officers of the U. S. Steamer Thomas Corwin and captains of the pacific whaling fleet on their return from the arctic. San Francisco 1880. 8°.

CH. W. BROOKS. Early discoveries of the Hawaiian Islands in the North Pacific Ocean. San Francisco 1880. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Tome V. N°. 196—209. fol.

ZUID-AMERIKA.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1880. Tomo X. Entr. 6. 8°.

AANGEKOCHT.

Bibliotheca Belgica. Livr. 10. 8°.

Journal des savants. Paris Décembre 1880. 4°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1880. 5e Série. Tome XXI. Décembre. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VII. N°. 37. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XI. N°. 65. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1880. N°. 52. 1881. N°. 1—3. 8°.

F. H. TROSCHEL. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1880. Jahrg. 64. Heft 4. 8°.

G. WIEDEMANN. Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1880. Neue Folge. Band XI. Heft 4—5. Beiblätter. Band IV. St. 12. 8°.

Allgemeine Deutsche Biographie. Leipzig 1880. Band XII. 8°.

DINGLER's polytechnisches Journal. Augsburg 1880. Band 238. Heft 6. 8°.

Bibliothèque universelle et revue suisse. Lausanne 1880. 3e Période. Tome VIII. N°. 11—12. Archives. 3e Période. Tome IV. N°. 12. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND FEBRUARI 1881.

NEDERLAND.

Nederlandsch tijdschrift voor geneeskunde. Amsterdam 1881. 2e Reeks. Jaarg. 17. 1e Afd. 8°.

Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam 1880. Deel VII. St. 1. 8°.

C. A. J. A. OUDEMANS. De ontwikkeling onzer kennis aangaande de flora van Nederland, uit de bronnen geschetst en kritisch toegelicht. 8°.

——————— en HUGO DE VRIES. Over den invloed der temperatuur op de ontkieming van zaden. 8°.

De Navorscher. Amsterdam 1880. Nieuwe Serie. Jaarg. 13. N°. 11—12. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1880. 4e Reeks. Deel IV. Afl. 12. Deel V. Afl. 1. 8°.

Museum d'histoire naturelle des Pays-Bas par H. SCHLEGEL. Leide 1881. Tome IX. 1. (Table alphabétique. Vol. I—VIII). 8°.

Flora Batava. Leyden 1880. Afl. 251—252. 4°.

J. A. FRUIN. De Nederlandsche wetboeken enz. Utrecht en 's Gravenhage 1881. Afl. 14. 8°.

BELGIË.

Annales de la Société entomologique de Belgique. Bruxelles 1880. Tome XXIII -XXIV. 8°.

J. PLATEAU. Bibliographie analytique des principaux phénomènes subjectifs de la vision. Bruxelles. s. a. 2e Supplément, comprenant les années 1878 et 1879. 4°.

M. VAN DER MENSBRUGGHE. Voyages et métamorphoses d'une goutelette d'eau. Bruxelles 1880. 8°.

FRANKRIJK.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N°. 4—7. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1880. Tome XXVII. (Session extraordinaire à Bayonne). 8°.

V. DURUY. Histoire des romains, depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1880. Livr. 153—156. roy. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N°. 228—231. 4°.

Recueil de l'Académie de législation de Toulouse. Paris, Toulouse 1869—1880. Tome XVIII—XXII. XXVIII. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Society. London 1880. Vol. XXXI. N°. 207—208. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol. XLI. N°. 3. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N°. 2. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1881. Serie II. Vol. I. Part 1. 8°.

Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1881. Vol. XIII. Part. 1. 8°.

OOSTENRIJK.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Prag 1880. Neue Folge. Band I. 8°.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. September und October 1880. 8°.

R. VIRCHOW. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1881. Band LXXXIII. Heft 1. 8°.

Neues Lausitziches Magazin, herausgegeben von der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Görlitz 1880. Band LVI. Heft 2. 8°.

Schriften der Universität zu Kiel aus dem Jahre 1879—80. Kiel 1880. Band XXVI. 4°.

Denkschriften der medecinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. 1880. Band I. Abth. 2. (Mit Atl.) 4°.

Inhoud:

E. HAECKEL. System der Craspedoten. 1ste Hälfte des Systems der Medusen.

R. HOPPE. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1880. Theil LXVI. Heft 1. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. 4te Jahrg. N°. 75—76. 8°.

PETERMANN's Mittheilungen aus Justus Perthe's geographischer Anstalt. Gotha 1881. Band XXVII. Heft 1. 4°.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. 1880. Band XV. Heft 1. 4°.

Inhoud:

H. BURMEISTER Cephalocoema und Phylloscyrtus, zwei merkwürdige Orthopteren-Gattungen der Fauna Argentina.

A. F. W. SCHIMPER. Die Vegetationsorgane von Prosopanche Burmeisteri.

G. KRAUS. Ueber die Wasservertheilung in der Pflanze. II Der Zellsaft und seine Inhalte.

H. STRASSER. Ueber die Grundbedingungen der activen Locomotion.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1881. (Transunti). Serie 3. Vol. V. Fasc. 4—5. 4°.

P. MANTEGAZZA. Archivio per l'antropologia e la etnologia. Firenze 1880. Vol. X. Fasc. 3. 8°.

Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel. Leipzig 1881. Band II. Heft 3. 8°.

DENEMARKEN.

Mémoires de l'Académie Royale de Copenhague. 1880. Classe des sciences. 5e Série. Vol. XII. N°. 6. 6e Série. Vol. I. N°. 1—2. 4°.

Inhoud, Vol. XII. N°. 6:

CHR. LUTKEN. Spolia Atlantica. Bidrag til kundskab om formforandringer hos fiske under deres Vaext og udvikling, saerligt hos nogle af Atlanterhavets Hojsofiske.

Vol. I:

1. K. PRYTZ. Undersogelser over lysets brydning i dampe og tilsvarende vaedsker.
2. J. E. O. BOAS. Recherches sur les affinités des crustacés décapodes.

Oversigt over det kong. Danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger og dets medlemmers arbejder i aaret 1880. Kjobenhavn 1880. 8°.

NOORD-AMERIKA.

The American journal of otology. New-York 1881. Vol. III. N°. 1. 8°.

Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Cambridge 1880. Vol. VIII. N°. 1—2. 8°.

Catalogue de l'exposition scolaire de la province de Quebec. Exposition du Canada. Montréal 1880. 8°.

Official programme of the Montreal citizens' dominion exhibition committee. Entertainments to take place from 14th to 24th September 1880. 8°.

Report of tenant farmers' delegates on the dominion of Canada as a field for settlement. Liverpool 1880. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1880. Tomo V. N°. 210—219. Tomo VI. N°. 1—4. fol.

ZUID-AMERIKA.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1881. Tome XI. Entr. 1. 8°.

C. BERG. La vida y costumbres de los termitos. Buenos Aires 1880. 8°.

AANGEKOCHT.

A. WILLEMS. Les Elzevier. Histoire et annales typographiques. Bruxelles 1880. roy. 8°.

Table générale des comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. (Tome XXXII à LXI). Paris 1870. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1880. 2e Série. Tome IV. Juin—Juillet. 8°.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XI. N°. 66. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VII. N°. 38. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1880. St. 4—8. Nachrichten. 1880. N°. 20—21. 1881. N°. 1—2. 8°.

G. WIEDEMANN. Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Neue Folge. Band XII. Heft 1. Beiblätter. Band V. N°. 1. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band 239. Heft 1—3. 8°.

Bibliothèque universelle et revue suisse. Lausanne 1881. 3e Période. Tome IX. N°. 25. 8°.

Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1881. 3e Période. Tome V. N°. 1—2. 8°.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. N°. 7—8. 8°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. Vol. XLIX. Part. 1. N°. 3. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND MAART 1881.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1880. N°. 9—10. 8°.

Verslag der Maatschappij Felix Meritis over het maatschappelijk jaar van 1 Mei 1879 tot ultimo April 1880. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1881. 4de Reeks. Deel V. Afl. 2. 8°.

Tijdschrift der Nederlandsche Dierkundige Vereeniging. Leiden 1881. Deel V. Afl. 3. 8°.

G. MEES AZN. Historische Atlas van Noord-Nederland, van de XVIde eeuw tot op de scheiding van België. Leiden 1881. 4°.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1881. Afl. 2. 1ste en 2de ged. 4°.

Nota der Commissie van hoofdingenieurs betrekkelijk den brief van het Amsterdamsch Rijnvaart-Comité aan den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid, dd. 26 November 1880. 's Gravenhage 1881. 4°.

Jhr. Mr. J. K. W. QUARLES VAN UFFORD. Een beroep op de Nederlandsche Maecenaten. 's Gravenhage 1881. 8°.

22ste Jaarlijksch verslag door de Hoofd-Commissie aan de leden van de Vereeniging tot daarstelling van eene algemeene openbare Bibliotheek en van een daaraan verbonden Leeskabinet te Rotterdam, medegedeeld in de algemeene Vergadering van 26 Februari 1881. 8°.

De vrije Fries. Mengelingen uitgegeven door het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1881. Deel XIV. Afl. 4. 8°.

52ste Verslag der handelingen van het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde te Leeuwarden over het jaar 1879—1880. 8°.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging. Nijmegen 1881. 2de Serie. Deel III. St. 3. 8°.

Penningkundig repertorium. Mededeelingen door Mr. J. DIRKS. N°. XIX—XXI. 8°.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden December 1880—Januari 1881. 's Gravenhage 1881. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de Schelde enz., waargenomen in de maand Juli 1880. 's Gravenhage 1880. fol.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome I. N0. 1. 8°.

Bulletin de l'Académie Royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N0. 1—2. 8°.

Notice sur JEAN-HENRI BORMANS par P. WILLEMS. Bruxelles 1881. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1881. Tome XCII. N0. 1—2. 4°.

Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres Bibliothèques, publiés par l'Institut National de France. Paris 1880. Tome XXIX. 2e Partie. 4°.

Inhoud:

E. MILLER. Glossaire grec-latin de la Bibliothèque de Laon.
HAURÉAU. Notice sur un manuscrit de la reine Christine.
L. DELISLE. Notices sur plusieurs manuscrits de la Biblithèque de Lyon.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N0. 8—12. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1880. Tome IX. N0. 1. 8°.

V. DURUY. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1880. Livr. 157—161. roy. 8°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1881. 4e Année. N0. 2—3. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N°. 232—235. 4°.

Mémoires de la Société des sciences, de l'agriculture et des arts de Lille. Paris, Lille 1880. 4e Série. Tome VII—VIII. 8°.

Inhoud. Tome VII:

J. HOUDOY. Histoire artistique de la cathédrale de Cambrai, ancienne église métropolitaine Notre Dame.

Tome VIII:

PUTON. Synopsis des Hémiptères-hétéroptères de France.
E. DUVILLIER. Sur la préparation du chlorure d'éthylène.
———— Sur la préparation de l'acide isooxyvalérique.
———— Sur les acides thioisooxyvalérianiques et thiodiisooxyvalériques.
CH. CASATI. Notice sur le musée du château de Rosenburg.
E. DUVILLIER. Sur les acides thiooxybutyrique et thiodiooxybutyrique normaux.
HOUZÉ DE L'AULNOIT. Aperçu général sur le congrès international d'hygiène de Paris.
L. DÉPRET. La question du pessimisme.
———— Souvenirs du congrès littéraire de Londres, Juin 1879.
BOUSSINESQ Étude sur divers points de la philosophie des sciences.
———— Calcul des dilatations éprouvées par les éléments matériels rectilignes appartenant à une portion infiniment petite d'une membrane élastique courbe, que l'on déforme et démonstration très simple du théorème de Gauss, sur la déformation des surfaces inextensibles.
B. CORENWINDER et G. CONTAMINE. Recherches chimiques sur les racines alimentaires.
E. DUVILLIER et A. BUISINE. Considérations sur le chloral, le chloroforme et l'acide formique.
———— Sur l'acide éthyloxybutyrique normal et ses dérivés.
———— Sur l'acide méthyloxybutyrique normal et ses dévisés.
F. KUHLMANN FILS. Note sur l'explosion d'un appareil de platine.
B. CORENWINDER et G. CONTAMINE. Nouvelle méthode pour analyser avec précision les potasses du commerce.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N°. 3. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol. XLI. N°. 4. 8°.

Medico-chirurgical transactions published by the Royal Medical and Chirurgical Society. London 1880. 2d Series. Vol. XLV. 8°.

Inhoud:

W. MILLER. An account of a large dermoid cyst found in the abdomen of a man.

——— Description of malformations of the genital organs of a man associated with persistence of one of the ducts of Müller.

LAWSON TAIT. Case of cholecystotomy performed for dropsy of the gall-bladder due to impaction of a gall-stone.

J. F. WEST. On trephining for traumatic epilepsy.

H. MORRIS. On two cases of carcinoma of the breast, preceded by so-called eczema of the nipple and areola.

F. S. EVE. Description of two cases of direct dislocation backwards of the femur with fracture of the rim of the acetabulum, with remarks on the mode of production of dislocations backwards.

CH. HEATH. On a case of aneurism of the subclavian artery treated by amputation at the shoulder-joint and the introduction of needles into the sac.

H. VANDYKE CARTER. Contributions to the experimental pathology of spirillum fever.

A. SANGSTER. A contribution to the non-glandular theory of origin of molluscum contagiosum.

LAWSON TAIT. The antiseptic theory tested bij the statistics of one hundred cases of successful ovariotomy.

A. E. BARKER. Nephrectomy by abdominal section.

F. W. PAVY. On the estimation of uric acid by its reducing action upon the ammoniated cupric test.

T. G. SMITH. A case of extreme pharyngeal stenosis the result of syphilis.

E. C. ANDERSON. On the partial metabolism, by the liver, of leucin and tyrosin into urea.

A. WILLETT and W. J. WALSHAM. An account of the dissection of the parts removed after death from the body of a woman the subject of conge-

nital malformation of the spinal column, bony thorax, and left scapular arch; with remarks on the probable nature of the defects indevelopment producing the deformities.

F. J. GANT. Compound fracture of the femur twenty years after excision of the knee-joint for disease, the line of fracture being transversely one inch above the bony union.

LAWSON TAIT. On the treatment of pelvic suppuration by abdominal section and drainage.

F. S. EVE. A case of sub-coracoid dislocation of the humerus, with the formation of an indentation on the posterior surface of the head, the joint being unopened, with remarks on the mode of production of fracture of the anatomical neck, with dislocation.

H. MORRIS. On a case of epithelioma of the neck following a patch of chronic skin disease, in which the cancer was twice excised and the external and internal jugulars were ligatured.

E. D. POWELL and R. W. LYELL. On a case of basic lavity of the lung treated bij paracentesis.

BARCLAY V. HEAD. On a himyaritic tetradrachm and the trésor de San'a. London 1880. 8°.

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. London, Paris 1879. 3d Series. Vol. VI. 8°.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. 1877—1880. Vol. XVI—XIX. 8°.

OOSTENRIJK.

H. WOLF. Geologische Gruben-Revier-Karte des Kohlenbeckens von Teplitz-Dux-Brüx. Wien 1880. 1e Lieferung. Plano. Mit Begleitworte. 8°.

Mittheilungen des Historischen Vereines für Steiermark. Graz 1880. Heft XXVIII. 8°.

Beiträge zur Kunde Steiermärkischer Geschichtsquellen, herausgegeben vom historischen Vereine für Steiermark. Graz 1880. Jahrg. 17. 8°.

Festschrift zur Erinnerung an die Feier der vor 700 Jahren stattgefundenen Erhebung der Steiermark zum Herzogthume (1180), herausgegeben vom Historischen Vereines für Steiermark. Graz 1880. 8°.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Presburg. 1880. Neue Folge. Heft 3. 8°.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der Kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin November 1880. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1881. Heft 9—10. Oblong.

N. PRINGSHEIM. Ueber Lichtwirkung und Chlorophyll-Function in der Pflanze. Berlin 1879. 8°.
(Separat-Abdrück aus dem Monatsbericht der kön. Akademie der Wissensch.).

——————— Zur Kritik der bisherigen Grundlagen der Assimilationstheorie der Pflanzen Berlin 1881. 8°.
(Separat-Abdrück aus dem Monatsbericht der kön. Akademie der Wissensch.).

——————— Untersuchungen über Lichtwirkung und Chlorophyllfunction in der Pflanze. Leipzig 1881. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. Jahrg. IV. N°. 77—78. 8°.

65ster Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Emden. 1879—1880. Emden 1880. 8°.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1879—1880. Band LXVI—LXIX. roy. 8°.

A. KIESSLING. De personis horatianis commentatio. Gryphiswaldiae 1880. 4°.

V. DE WILAMOWITZ-MOELLENDORFF. Commentariolum grammaticum II. Gryphiswaldiae 1880. 4°.

J. HOFFKAMP. Ueber Behandlung der febris intermittens mittelst Faradisation des dabei vorkommenden Milztumors. Greifswald 1880. 8°.

W. BLIESKE. Ein Fall von iritis crouposa. Greifswald 1880. 8°.

L. SIKORSKI. Ueber die Veränderungen der Form und Structur der Knochen unter veränderter Belastung. Greifswald 1880. 8°.

F. HEINELT. Zur Casuistic, Symptomatologie und Therapie der Scheidentumoren. Greifswald 1880. 8°.

P. KRÖNING. Untersuchungen über traumatische Gelenkkörper. Greifswald 1880. 8°.

A. SEIDEL. Therapeutische Versuche bei künstlich erzeugten Gelenkentzündungen. Greifswald 1880. 8°.

O. THIENEL. Beitrag zur Symptomatologie, Diagnostik und Therapie multipler Echinococcen am Netz, Mesenterium und im kleinen Becken. Greifswald 1880. 8°.

F. KRAUS. Ein Fall von totalem Vaginalprolaps während der Schwangerschaft und Geburt. Greifswald 1880. 8°.

W. ECKARDT. Sechs Ovariotomien. Greifswald 1880. 8°.

W. KOETHE. Zur Statistik perforirender Verletzungen des Augapfels. Greifswald 1880. 8°.

R. NEUMANN. Drei Fälle von sympathischem Augenleiden. Greifswald 1880. 8°.

J. HEINRICHS. Ueber das Verhalten der Reflexe insbesondere des Patellarsehnenreflexes in der artificiellen (toxischen) Narcose. Greifswald 1880. 8°.

M. GROSSMANN. Ueber die Messung der Schärfe des Farbensinnes. Greifswald 1880. 8°.

A. JANUSCH. Drei Fälle von Microcephalie. Greifswald 1880. 8°.

A. POHLMANN. Vergleichende Untersuchungen über die subcutane und die offene aseptische Tenotomie. Greifswald 1880. 8°.

J. NELKE. Untersuchungen über parenchymatöse und subcutane Alkohol-Injectionen. Greifswald 1880. 8°.

O. JORDAN. Ueber Azoverbindungen der Metasulfobenzolsäure. Greifswald 1880. 8°.

W. MÜLLER. Beitrag zur Kenntniss der Fortpflanzung und der Geschlechtsverhältnisse der Ostracoden nebst Beschreibung einer neuen Species der Gattung Cypris. Greifswald 1880. 8°.

E. LIEBENTHAL. Untersuchungen über die Attraction zweier homogener Körper. Greifswald 1880. 4°.

W. STOEWER. Heinrich I, Erzbischof von Mainz (1142—1153). Greifswald 1880. 8°.

E. HAUFE. Die Fragmente der Rede der Seele an den Leichnam in der Handschrift der Cathedrale zu Worcester neu nach der HS. herausgegeben. Greifswald 1880. 8°.

M. RUNZE. Kant's Kritik an Hume's Scepticismus. Berlin 1880. 8°.

O. LEHMANN. Ueber Kant's Principien der Ethik und Schopenhauer's Beurtheilung derselben. Greifswald 1880. 8°.

H. KUMMROW. Symbola critica ad grammaticos latinos. Gryphiswaldiae 1880. 4°.

J. MUELLER. De figuris quaestiones criticae. Part. 1. Gryphiswaldiae 1880. 8°.

R. GAEDE. Demetri scepsii quae supersunt. Gryphiswaldiae 1880. 8°.

G. KNAACK. Analecta Alexandrino-romana. Gryphiswaldiae 1880. 8°.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung, herausgegeben von der kön. bayer. botan. Gesellschaft. Regensburg 1880. Neue Reihe. Jahrg. 38. 8°.

Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. Neubrandenburg 1880. Jahr 34. 8°.

19, 20 und 21er Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins für Naturkunde. Offenbach a/M. 1880. 8°.

Jahres-Bericht des Historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg für 1879. Würzburg 1880. 8°.

L. FRIES. Die Geschichte des Bauernkrieges in Ostfranken, Band II. Lief. 1. Würzburg 1879. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1881. (Transunti). Serie 3. Vol. V. Fasc. 6—7. 4°.

G. B. DE ROSSI. Piante icnografiche e prospettiche di Roma anteriori al secolo XVI. Roma 1879. gr. 4°. Met atlas in plano en kaart.

Atti della Societa Toscana di scienze naturali. Processi Verbali di 9 Gennaio 1881. 8°.

G. M. CARDONI. Gli amori di cecilia e di giorgione pittore famoso. Faenza 1881. 8°.

PORTUGAL.

Boletim da Sociedade de Geographia de Lisboa. Lisboa 1880. 2e Serie. N°. 1—2. 8°.

L. MALHEIRO. Explorações geologicas e mineiras nas colonias portuguezas. Lisbao 1881. 8°.

J. J. MACHADO. Moçambique. Lisboa 1881. 8°.

DENEMARKEN.

Aarböger for Nordisk oldkyndighed og historie, utgivne af det kongelige Nordiske Oldskrift Selskab. Kjobenhavn 1878—1880. Aarg. 1878. Hefte 2—4. Aarg. 1879. Hefte 1—4. Aarg. 1880. Hefte 1. 8°.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1879—1880. 7e Série. Tome XXVII. N°. 2—14. 4°.

Inhoud:

2. J. BARANETZKY. Die tägliche Periodicität im Längewachsthum der Stengel.
3. A. BOUTLEROW. Sur l'isotributylène.
4. J. SCHMALHAUSEN. Beiträge zur Jura-Flora Russlands.

5. V. VON MÖLLER. Die Foraminiferen des russischen Kohlenkalks.
6. W. DYBOWSKI. Studien über die Spongien des russischen Reiches mit besonderer Berücksichtigung der Spongien-Fauna des Baikal-Sees.
7. L. VON SCHRENCK. Der erste Fund einer Leiche von Rhinoceros Merckii Jaeg.
8. A. BUNGE. Pflanzen-Geographische Betrachtungen über die Familie der Chenopodiaceen.
9. W. GRUBER. Ueber den anomalen Canalis basilaris medianus des os occipitale beim Menschen mit vergleichend-anatomischen Bemerkungen.
10. O. HEER. Nachträge zur Jura-Flora Sibiriens gegrundet auf die von Herren Richard Maak in Ust-Balei gesammelten Pflanzen.
11. O. STRUVE. Études sur le mouvement relatif des deux étoiles du système de 61 cygni.
12. H. ABICH. Ein Cyclus fundamentaler Barometrischer Höhenbestimmungen auf dem Armenischen Hochlande.
13. J. DANSKY und J. KOSTENITSCH. Ueber die Entwickelungsgeschichte der Keimblätter und des Wolff'schen Ganges im Hühnerei.
14. E. MEIJER. Die Spermatogenese bei den Säugethieren.

Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1881. Tome XXVII. N°. 1. 4°.

Observations de Poulkova. St. Pétersbourg 1879. Vol. XI. gr. 4°.

Jahresbericht für 1878—79 und 1879—80 am 24 Mai 1880 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. St. Petersburg 1880. 8°.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. St. Petersburg 1880. Jahrg. 1879. Theil I—II. gr. 4°.

ИЗВѢСТІЯ ИМПЕРАТОРСКАГО РУССКАГО ГЕОТРАФИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА. St. Petersburg 1879—1881. 8°.

Bulletin de la Société impériale des naturalistes de Moscou. 1880. Tome LV. N°. 2. 8°.

NOORD-AMERIKA.

Smithsonian contributions to knowledge. Washington 1880. Vol. XXII. 4°.

Inhoud:

J. JONES. Explorations of the aboriginal remains of Tennessee.
S. HABEL. The sculptures of Santa Lucia Cosumalwhuapa in Guatemala. With an account of travels in Central America and on the Western Coast of South America.
CH. RAU. The archaeological collection of the United States National Museum.
——— The palenque tablet in the United States National Museum.
W. H. DALL. On the remains of later pre-historic man obtained from caves in the Catherina Archipelago, Alaska Territory, and especially from the caves of the Aleutian Islands.

Smithsonian miscellaneous collections. Washington 1880. Vol. XVI—XVII. 8°.

Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution showing the operations, expenditures, and condition of the Institution for the year 1878. Washington 1879. 8°.

W. E. WOODBRIDGE. Measurement of powder pressures in cannon by means of the registered compression of oil. Washington 1879. 8°.

E. S. HOLDEN. A subject-index to the publications of the United States Naval Observatory, 1845—1875. Washington 1879. 4°.

Report upon United States Geographical Surveys west of the one hundredth meridian. Washington 1875—1878. Vol. II—VI. 4°. With topographical map. Plano.
(Vol. II. Astronomy and barometric hypsometry. Vol. III. Geology. Vol. IV. Paleontology. Vol. V. Zoology. Vol. VI. Botany).

Proceedings of the American Philosophical Society. Philadelphia 1880. Vol. XVIII. N°. 105—106. 8°.

List of the members of the American Philosophical Society. 1880. 8°.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Boston 1880. New Series. Vol. VII. Part 2. 8°.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Boston 1879. Vol. III. Part 1. N°. 3. 4°.

Inhoud:

S. H. SCUDDER. Palaeozoic cockroaches: a complete revision of the species of both worlds, with an essay toward their classification.

Occasional papers of the Boston Society of natural history. Boston 1880. Vol. III. 8°.

Inhoud:

W. O. CROSBY Contributions to the geology of eastern Massachusetts.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Boston 1879—1880. Vol XX. Part. 2—3. 8°.

Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Cambridge 1881. Vol. VIII. N°. 3. 8°.

Annals of the New-York Academy of sciences. New-York 1879—1880. Vol. I. N°. 9—13. 8°.

American journal of science. New Haven 1880. Vol. XIX—XX. N°. 113—120. 8°.

Transactions of the Academy of science of St. Louis. 1880. Vol. IV. N°. 1. 8°.

Inhoud:

W. HOLMES. The geological and geographical distribution of the human race.

A. CORUNA Y COLLUDO. Zoque: the language spoken at Santa Maria de Chimalapa, and at San Miguel and Tierra Blanca, in the state of Chiapes, Mexico.

C. M. SCOTT. On the improvement of the western rivers.

G. SEYFFARTH. Egyptian theology, according to a Paris mummy-coffin.

F. E. NIPHER. Report on magnetic observations in Missouri, summer of 1878 and 1879.

WADSWORTH and NIPHER. The tornado of April 14, 1879.

G. HAMBACH. Contribution to the anatomy of the genus Pentremites, with description of new species.

G. ENGELMANN. Revision of the genus Pinus, and description of Pinus Elliottii.

——————— The acorns and their germination.

Contributions to the archaeology of Missouri by the Archaelogical Section of the St. Louis Academy of science. Salem 1880. Part. 1. Portery. 4°.

Inhoud:

W. B. POTTER. Archaeological remains in Southeastern Missouri.

Transactions of the Wisconsin Academy of sciences, arts and letters. Madison 1878. Vol. IV. 8°.

Boletin del Ministerio de Fomento dela republica Mexicana. Mexico 1881. Tomo VI. N°. 5—17. fol.

Revista mensual climatologica. Mexico 1881. Tomo I. N°. 1. 4°.

A Z I Ë.

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Yokohama 1881. Heft 22. 4°.

A F R I K A.

Bulletin trimestriel de la Société khédiviale de géographie du Caire. 1877. N°. 4. 8°.

A A N G E K O C H T.

Journal des savants. Paris Janvier—Février 1881. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1880. 2e Série. Tome IV. Août. 8°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1881. 5e Série. Tome XXI. Février. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VII. N°. 39. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XI. N°. 67. 8°.

Mittheilungen der k. k. Central-Commission zur Erforschung und Erhaltung der kunst- und historischen Denkmale. Wien 1881. Neue Folge. Band VII. Heft 1. 4°.

F. H. TROSCHEL. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1880. Jahrg. 64. Heft 5. 8°.

Linnaea. Ein Journal für die Botanik in ihrem ganzen Umfange. Berlin 1880. Neue Folge. Band XLIII. Heft 1—2. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Göttingen 1881. St. 9—11. Nachrichten. 3—5. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band 239. Heft 4—5. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1880. Jahrg. 28. Heft 2—3. 8°.

G. WIEDEMANN. Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Neue Folge. Band XII. Heft 2—3. Beiblätter. Band V. St. 2—3. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1881. 3e Période. Tome IX. N°. 26. 8°.

Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1881. 3e Période. Tome V. N°. 3. 8°.

THE UNIVERSITY LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA CRUZ
SCIENCE LIBRARY

This periodical is due on **DATE** stamped below.
To renew by phone, call **459-2050**

SCI. LIB.

STORED AT NRLF

Series 1665

50m-8,'65(F6252s0)

STORED AT NRLF